# Suites et séries de fonctions

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

# Principe du recouvrement

Pour montrer que $f$ est continue / dérivable / de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle $J$, il suffit de montrer que $f$ est continue / dérivable / de classe $\mathscr{C}^k$ sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $J$.

# Principe du recouvrement

Pour montrer que $f$ est continue / dérivable / de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle $J$, il suffit de montrer que $f$ est continue / dérivable / de classe $\mathscr{C}^k$ sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $J$.

**Variantes :**

- si $J = ]a, b]$ on peut recouvrir par $[\alpha, b]$ avec $\alpha > a$ ;
- si $J = [a, b[$ on peut recouvrir par $[a, \beta]$ avec $\beta < b$ ;
- si $J = ]a, b[$ on peut recouvrir par $[\alpha, b[$ avec $\alpha > a$ ou $]a, \beta]$ avec $\beta < b$ ;

# Suites de fonctions

- $(f_n)$ CVS vers $f$ sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ ;
- $(f_n)$ CVU vers $f$ sur $I$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0$.

La CVU entraîne la CVS.

# Suites de fonctions

- $(f_n)$ CVS vers $f$ sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ ;
- $(f_n)$ CVU vers $f$ sur $I$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0$.

La CVU entraîne la CVS.

**Méthodologie.**

- CVS : on fixe $x \in I$ puis on étudie la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ;
- CVU : on étudie $f_n - f$ pour calculer $\|f_n - f\|_{\infty,I}$.

# Suites de fonctions

## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

# Suites de fonctions

## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

On fixe $x \geqslant 0$.
Si $x = 0$, $f_n(0) = sin(0) = 0$. Si $x > 0$, pour $n \geqslant 1/x$ on a $f_n(x) = 0$.
Donc $(f_n)$ CVS vers la fonction nulle.

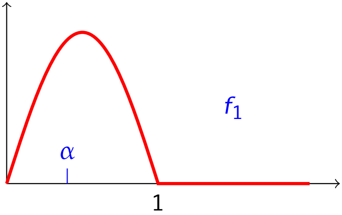
# Suites de fonctions

## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

On fixe $x \geqslant 0$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = sin(0) = 0$. Si $x > 0$, pour $n \geqslant 1/x$ on a $f_n(x) = 0$.
Donc $(f_n)$ CVS vers la fonction nulle.



# Suites de fonctions

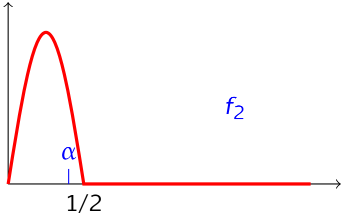
## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

On fixe $x \geqslant 0$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = sin(0) = 0$. Si $x > 0$, pour $n \geqslant 1/x$ on a $f_n(x) = 0$.

Donc $(f_n)$ CVS vers la fonction nulle.



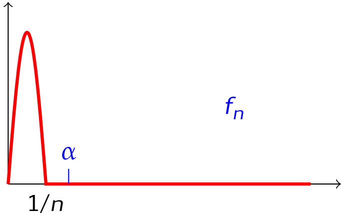
# Suites de fonctions

## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

On fixe $x \geqslant 0$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = sin(0) = 0$. Si $x > 0$, pour $n \geqslant 1/x$ on a $f_n(x) = 0$.
Donc $(f_n)$ CVS vers la fonction nulle.

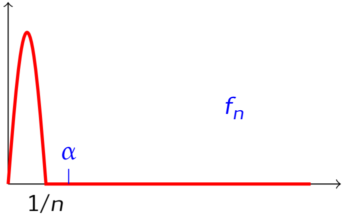


# Suites de fonctions

## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

On fixe $x \geqslant 0$.
Si $x = 0$, $f_n(0) = sin(0) = 0$. Si $x > 0$, pour $n \geqslant 1/x$ on a $f_n(x) = 0$.
Donc $(f_n)$ CVS vers la fonction nulle.




Pour $I = [0, +\infty[$, $\|f_n - f\|_\infty = 1$ donc pas de CVU.

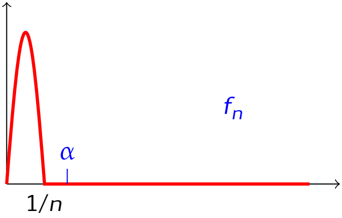
# Suites de fonctions

## Exemple

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS et CVU de $f_n : x \mapsto \begin{cases} \sin(n\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$

On fixe $x \geqslant 0$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = sin(0) = 0$. Si $x > 0$, pour $n \geqslant 1/x$ on a $f_n(x) = 0$.
Donc $(f_n)$ CVS vers la fonction nulle.




Pour $I = [0, +\infty[$, $\|f_n - f\|_\infty = 1$ donc pas de CVU.
En revanche, CVU sur tout $[\alpha, +\infty[$ car pour $n \geqslant 1/\alpha$, $\|f_n - f\|_\infty = 0$.

# Continuité et dérivabilité

**Continuité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$ ;
- $(f_n)$ CVU vers $f$ sur $I$.

alors $f$ est continue sur $I$.

**Dérivabilité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ ;
- $(f_n)$ CVS vers $f$ sur $I$ ;
- $(f_n')$ CVU vers $g$ sur $I$.

Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $f' = g$.

# Continuité et dérivabilité

**Continuité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$ ;
- $(f_n)$ CVU vers $f$ sur $I$.

alors $f$ est continue sur $I$.

**Dérivabilité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ ;
- $(f_n)$ CVS vers $f$ sur $I$ ;
- $(f_n')$ CVU vers $g$ sur $I$.

Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $f' = g$.

Penser au principe du recouvrement : $f$ continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur tout segment inclus dans $J$ entraîne $f$ continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur $I$.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$.
On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a, b]$.
On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

• Soit $x < y \in [a, b]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc $(n \to +\infty)$ $f(x) \leqslant f(y)$ : $f$ est croissante.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

• Soit $x < y \in [a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc $(n \to +\infty)$ $f(x) \leqslant f(y)$ : $f$ est croissante.
• Soit $\epsilon > 0$. $f$ est croissante et $\mathscr{C}^0$ donc il existe une subdivision $(x_0 = a, \ldots, x_p = b)$ telle que $f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant \epsilon$.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

• Soit $x < y \in [a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc $(n \to +\infty)$ $f(x) \leqslant f(y)$ : $f$ est croissante.

• Soit $\epsilon > 0$. $f$ est croissante et $\mathscr{C}^0$ donc il existe une subdivision $(x_0 = a, \dots, x_p = b)$ telle que $f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant \epsilon$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a) + (p-1)\epsilon < f(b) \leqslant f(a) + p\epsilon$.
TVI : $\forall i \in [\![0, p-1]\!], \exists x_i \in [a,b] \mid f(x_i) = f(a) + i\epsilon$.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

• Soit $x < y \in [a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc $(n \to +\infty)$ $f(x) \leqslant f(y)$ : $f$ est croissante.

• Soit $\epsilon > 0$. $f$ est croissante et $\mathscr{C}^0$ donc il existe une subdivision $(x_0 = a, \dots, x_p = b)$ telle que $f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant \epsilon$.

• $\forall i \in [\![0,p]\!], \exists N_i \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N_i \implies |f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \epsilon$. On pose $N = \max_i N_i$.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

• Soit $x < y \in [a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc $(n \to +\infty)$ $f(x) \leqslant f(y)$ : $f$ est croissante.

• Soit $\epsilon > 0$. $f$ est croissante et $\mathscr{C}^0$ donc il existe une subdivision $(x_0 = a, \dots, x_p = b)$ telle que $f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant \epsilon$.

• $\forall i \in [\![0,p]\!], \exists N_i \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N_i \implies |f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \epsilon$. On pose $N = \max\limits_i N_i$.

• Soit $x \in [a,b]$, et $i \in [\![0,p-1]\!]$ tel que $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Alors $\forall n \geqslant N$,

$$f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(x_{i+1}) - f(x_i) = f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant 2\epsilon$$
$$f_n(x) - f(x) \geqslant f_n(x_i) - f(x_{i+1}) = f_n(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x_{i+1}) \geqslant -2\epsilon$$

donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\epsilon$, et $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2\epsilon$.

# Un théorème de Dini (HP)

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$. On suppose :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante ;
- $f$ est continue.

Alors la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

• Soit $x < y \in [a,b]$. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc $(n \to +\infty)$ $f(x) \leqslant f(y)$ : $f$ est croissante.
• Soit $\epsilon > 0$. $f$ est croissante et $\mathscr{C}^0$ donc il existe une subdivision $(x_0 = a, \dots, x_p = b)$ telle que $f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant \epsilon$.
• $\forall i \in [\![0,p]\!], \exists N_i \in \mathbb{N} \,\big|\, n \geqslant N_i \implies |f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \epsilon$. On pose $N = \max\limits_i N_i$.
• Soit $x \in [a,b]$, et $i \in [\![0,p-1]\!]$ tel que $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Alors $\forall n \geqslant N$,

$$f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(x_{i+1}) - f(x_i) = f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x_i) \leqslant 2\epsilon$$
$$f_n(x) - f(x) \geqslant f_n(x_i) - f(x_{i+1}) = f_n(x_i) - f(x_i) + f(x_i) - f(x_{i+1}) \geqslant -2\epsilon$$

donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\epsilon$, et $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2\epsilon$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Deux théorèmes pour intervertir limite et intégrale :

# Intégration d'une suite de fonctions

Deux théorèmes pour intervertir limite et intégrale :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n$ est continue et si $(f_n)$ CVU vers $f$ sur $[a, b]$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Deux théorèmes pour intervertir limite et intégrale :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n$ est continue et si $(f_n)$ CVU vers $f$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Théorème de convergence dominée**. On suppose que :
  1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ sur $I$ ;
  2. $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ ;
  3. il existe une fonction $\phi$ $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur $I$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant \phi(t)$.

  Alors $f$ est intégrable sur $I$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

# Intégration d'une suite de fonctions

Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

- $f_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ ;

# Intégration d'une suite de fonctions

Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

- $f_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ ;
- Soit $t > 0$ fixé. APCR, $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^{-t}$ donc $(f_n)$ CVS vers $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ ;

# Intégration d'une suite de fonctions

Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

- $f_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ ;
- Soit $t > 0$ fixé. APCR, $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^{-t}$ donc $(f_n)$ CVS vers $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ ;
- $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \phi(t)$.

$\phi$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ \mathscr{C}^0$ ; déterminer $\lim u_n$ avec $u_n = n \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

Deux difficultés : pas de limite simple de $nf(x^n)$ et une borne qui dépend de $n$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ \mathscr{C}^0$ ; déterminer $\lim u_n$ avec $u_n = n \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

Deux difficultés : pas de limite simple de $nf(x^n)$ et une borne qui dépend de $n$.

Chgt de variable $t = x^n$ : $u_n = \displaystyle\int_1^{x_n} t^{1/n}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

# Intégration d'une suite de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^0$ ; déterminer $\lim u_n$ avec $u_n = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

Deux difficultés : pas de limite simple de $nf(x^n)$ et une borne qui dépend de $n$.

Chgt de variable $t = x^n$ : $u_n = \displaystyle\int_1^{x_n} t^{1/n} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\lim x_n = \mathrm{e}$ et $x_n \leqslant \mathrm{e}$ : $u_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f_n(t) = \begin{cases} t^{1/n} \dfrac{f(t)}{t} & \text{si } t \in [1, x_n] \\ 0 & \text{si } t \in ]x_n, \mathrm{e}] \end{cases}$

# Intégration d'une suite de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ \mathscr{C}^0$ ; déterminer $\lim u_n$ avec $u_n = n\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

Deux difficultés : pas de limite simple de $nf(x^n)$ et une borne qui dépend de $n$.

Chgt de variable $t = x^n$ : $u_n = \displaystyle\int_1^{x_n} t^{1/n}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\lim x_n = \mathrm{e}$ et $x_n \leqslant \mathrm{e}$ : $u_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f_n(t) = \begin{cases} t^{1/n}\dfrac{f(t)}{t} & \text{si } t \in [1, x_n] \\ 0 & \text{si } t \in ]x_n, \mathrm{e}] \end{cases}$

- $(f_n)$ CVS vers $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ sur $[1, \mathrm{e}]$ ;
- $\left| t^{1/n}\dfrac{f(t)}{t} \right| \leqslant \|f\|_{\infty,[1,\mathrm{e}]} = \phi(t)$.

$\phi$ est constante donc intégrable sur $[1, \mathrm{e}]$, donc $\lim u_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

# Séries de fonctions

- $\sum f_n$ CVS sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- $\sum f_n$ CVA sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.
- $\sum f_n$ CVU sur $I$ lorsque $\sum f_n$ CVS et $\lim \|R_n\|_{\infty,I} = 0$.
- $\sum f_n$ CVN sur $I$ lorsque la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

# Séries de fonctions

- $\sum f_n$ CVS sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- $\sum f_n$ CVA sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.
- $\sum f_n$ CVU sur $I$ lorsque $\sum f_n$ CVS et $\lim \|R_n\|_{\infty,I} = 0$.
- $\sum f_n$ CVN sur $I$ lorsque la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{CVN}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{CVA}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{CVU}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{CVS}}
\end{tikzcd}$$

# Séries de fonctions

- $\sum f_n$ CVS sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- $\sum f_n$ CVA sur $I$ lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.
- $\sum f_n$ CVU sur $I$ lorsque $\sum f_n$ CVS et $\lim \|R_n\|_{\infty,I} = 0$.
- $\sum f_n$ CVN sur $I$ lorsque la série $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{CVN}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{CVA}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{CVU}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{CVS}}
\end{tikzcd}$$

**Aspect pratique** : lorsque le CSSA s'applique, on prouve directement la CVU (majoration du reste); dans les autres cas, on prouve la CVU par le biais de la CVN.

# Continuité et dérivabilité

**Continuité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$ ;
- $\sum f_n$ CVU sur $I$.

alors $S = \sum f_n$ est continue sur $I$.

**Dérivabilité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ ;
- $\sum f_n$ CVS sur $I$ ;
- $\sum f_n'$ CVU sur $I$.

Alors $S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $S' = \sum f_n'$.

# Continuité et dérivabilité

**Continuité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $I$ ;
- $\sum f_n$ CVU sur $I$.

alors $S = \sum f_n$ est continue sur $I$.

**Dérivabilité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ ;
- $\sum f_n$ CVS sur $I$ ;
- $\sum f_n'$ CVU sur $I$.

Alors $S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et $S' = \sum f_n'$.

**Extension du th. de dérivabilité :**

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $I$ ;
- $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur $I$ ;
- $\sum f_n^{(p)}$ CVU sur $I$.

Alors $S$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $I$ et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $S^{(k)} = \sum f_n^{(k)}$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation de la CVN

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{n^2}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
- Prouver la continuité de $f$ sur son ensemble de définition.
- Prouver la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation de la CVN

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
- Prouver la continuité de $f$ sur son ensemble de définition.
- Prouver la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CVA sur $\mathbb{R}$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation de la CVN

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
- Prouver la continuité de $f$ sur son ensemble de définition.
- Prouver la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CVA sur $\mathbb{R}$.
- Sur $[-a, a]$, $\|f_n\|_\infty = \arctan\left(\frac{a}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CVN sur tout $[-a, a]$.
  Donc $f$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[-a, a]$ puis sur $\mathbb{R}$ (recouvrement).

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation de la CVN

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
- Prouver la continuité de $f$ sur son ensemble de définition.
- Prouver la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CVA sur $\mathbb{R}$.
- Sur $[-a, a]$, $\|f_n\|_\infty = \arctan\left(\frac{a}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CVN sur tout $[-a, a]$. Donc $f$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[-a, a]$ puis sur $\mathbb{R}$ (recouvrement).
- $f_n'(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$ donc $\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$. $\sum f_n'$ CVN donc CVU sur $\mathbb{R}$ ; $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- CSSA $\rightarrow$ CVS, et $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)x}$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- CSSA $\to$ CVS, et $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)x}$.

  Sur $[\alpha, +\infty[$ ($\alpha > 0$), $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)\alpha}$ donc CVU sur $[\alpha, +\infty[$.

  $f$ est continue sur tout $[\alpha, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ (recouvrement).

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- CSSA $\to$ CVS, et $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)x}$.

  Sur $[\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$, $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)\alpha}$ donc CVU sur $[\alpha, +\infty[$.

  $f$ est continue sur tout $[\alpha, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ (recouvrement).
- CSSA : $1 - \dfrac{1}{1+x} \leqslant f(x) \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$. Le CSSA s'applique ?

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$. Le CSSA s'applique ?

$\rightarrow$ on fixe $x > 0$ ; on étudie $\phi(t) = \dfrac{t}{(1+tx)^2}$.

| $x$ | $0$ | | $1/x$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$. Le CSSA s'applique ?

$\rightarrow$ on fixe $x > 0$ ; on étudie $\phi(t) = \dfrac{t}{(1+tx)^2}$.

| $x$ | $0$ | $1/x$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\phi(t)$ | ↗ | | ↘ |

$\forall n \geqslant \dfrac{1}{x}$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{n+1}{(1+(n+1)x)^2}$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$. Le CSSA s'applique ?

| $x$ | $0$ | | $1/x$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$\to$ on fixe $x > 0$ ; on étudie $\phi(t) = \dfrac{t}{(1+tx)^2}$.

$\forall n \geqslant \dfrac{1}{x}$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{n+1}{(1+(n+1)x)^2}$.

Sur $[\alpha, +\infty[$, $\forall n \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$, $\|R_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} \leqslant \dfrac{n+1}{(1+(n+1)\alpha)^2}$ donc CVU sur $[\alpha, +\infty[$.

# Continuité et dérivabilité

## Utilisation du critère spécial

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

- Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$. Le CSSA s'applique ?

$\rightarrow$ on fixe $x > 0$ ; on étudie $\phi(t) = \dfrac{t}{(1+tx)^2}$.

| $x$ | $0$ | $1/x$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\phi(t)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$\forall n \geqslant \dfrac{1}{x}$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{n+1}{(1+(n+1)x)^2}$.

Sur $[\alpha, +\infty[$, $\forall n \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$, $\|R_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} \leqslant \dfrac{n+1}{(1+(n+1)\alpha)^2}$ donc CVU sur $[\alpha, +\infty[$.

$f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ (recouvrement).

# Intégration

Trois théorèmes pour justifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ :

# Intégration

Trois théorèmes pour justifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ :

- $I = [a, b]$, les $f_n$ sont $\mathscr{C}^0$ et $\sum f_n$ CVU sur $[a, b]$ ;

# Intégration

Trois théorèmes pour justifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ :

- $I = [a, b]$, les $f_n$ sont $\mathscr{C}^0$ et $\sum f_n$ CVU sur $[a, b]$ ;
- les $f_n$ sont $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrables sur $I$, $\sum f_n$ CVS et sa somme est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$, et $\displaystyle\sum_n \int_I |f_n|$ CV ;

# Intégration

Trois théorèmes pour justifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ :

- $I=[a,b]$, les $f_n$ sont $\mathscr{C}^0$ et $\sum f_n$ CVU sur $[a,b]$ ;
- les $f_n$ sont $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrables sur $I$, $\sum f_n$ CVS et sa somme est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$, et $\displaystyle\sum_n \int_I |f_n|$ CV ;
- $\displaystyle\int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_I R_n(t)\,\mathrm{d}t$ et on prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I R_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (à l'aide du th. de CV dominée).

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

CSSA : $\forall x > 0$, $(\mathrm{e}^{-\lambda_n x})_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0 donc $S$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

CSSA : $\forall x > 0, (\mathrm{e}^{-\lambda_n x})_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0 donc $S$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{n+1} x}$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

CSSA : $\forall x > 0$, $(\mathrm{e}^{-\lambda_n x})_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0 donc $S$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{n+1} x}$.

Sur $[\alpha, +\infty[$, $\|R_n\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{n+1}\alpha}$ donc $\lim \|R_n\|_\infty = 0$ : CVU sur tout $[\alpha, +\infty[$.

Les $f_n$ étant continues, $S$ est continue sur $[\alpha, +\infty[$ puis par recouvrement sur $\mathbb{R}_+^*$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0,\infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n}$. les fonctions $f_n$ sont intégrables.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n}$. les fonctions $f_n$ sont intégrables.

- Si $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ CV on applique le th. d'interversion : $S$ est intégrable et $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n}$. les fonctions $f_n$ sont intégrables.

- Si $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ DV méthode alternative : $S(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) + R_n(x)$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n}$. les fonctions $f_n$ sont intégrables.

- Si $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ DV méthode alternative : $S(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) + R_n(x)$.

$|R_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_{n+1} x} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0 x} = \phi(x)$. $\phi$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable donc (CV dominée) $R_n$ est intégrable et $\lim \int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

# Intégration

Soit $(\lambda_n)$ une suite croissante de réels strictement positifs qui diverge vers $+\infty$, et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n x}$.

- Montrer que $S$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.
- Montrer que $S$ est intégrable et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n}$. les fonctions $f_n$ sont intégrables.

- Si $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ DV méthode alternative : $S(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) + R_n(x)$.

$S$ est somme finie de fcns intégrables donc est intégrable, et

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda_k} + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_k}$$