Suites et séries de fonctions

Principe du recouvrement

Si f est continue (respectivement dérivable ou de classe $\mathscr{C}^p$) sur tout segment de I alors f est continue (respectivement dérivable ou de classe $\mathscr{C}^p$) sur I.

Suites de fonctions

- (f_n) converge *simplement* vers f sur I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I}$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.
- (f_n) converge *uniformément* vers f sur I lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,\mathrm{I}} = 0$. La CVU entraîne la CVS.

Continuité, dérivabilité

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si (f_n) converge uniformément vers f sur I alors f est continue sur I.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, si (f_n) converge simplement vers f sur I et si (f_n') converge uniformément vers g sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Intégration

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue et si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Théorème de convergence dominée**. On suppose que :
  (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ sur I ;
  (ii) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$;
  (iii) il existe une fonction ϕ $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant \phi(t)$.

  Alors f est intégrable sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Séries de fonctions

- $\sum f_n$ converge *simplement* sur I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I}$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- $\sum f_n$ converge *absolument* sur I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I}$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.
- $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I lorsque $\sum f_n$ converge simplement et $\lim \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{I}} = 0$.
- $\sum f_n$ converge *normalement* sur I lorsque la série $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathrm{I}}$ converge.

Continuité, dérivabilité

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, la somme S est continue sur I.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, si $\sum f_n$ converge simplement sur I et si $\sum f_n'$ converge uniformément sur I alors la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\mathrm{S}' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I, si pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I et si $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I alors la somme S est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $\mathrm{S}^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Intégration

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue et si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Théorème d'interversion somme / intégrale**. On suppose que :
  (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur I ;
  (ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I, et sa somme est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$;
  (iii) la série numérique $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ converge.

  Alors la somme S est intégrable sur I et $\int_{\mathrm{I}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Méthode alternative**. On applique le théorème de convergence dominée à la suite des restes (R_n) :

$$\text{On écrit } \int_{\mathrm{I}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathrm{I}} f_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et on fait tendre } n \text{ vers } +\infty.$$