Corrigé : interrogation sur les suites et séries de fonctions

Exercice 1

a) Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(x+n)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument, ce qui assure l'existence de $\mathrm{S}(x)$.

b) Soit $\alpha > 0$. $\forall x \in [0,\alpha]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{\alpha}{n^2}$ donc $\|f_n\|_{\infty,[0,\alpha]} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Les fonctions f_n sont continues et la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,\alpha]$ donc S est continue sur $[0,\alpha]$, puis par recouvrement sur $\mathbb{R}_+$.

c) $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n}\Big)$. Or par télescopage $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\Big(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n}\Big) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1+\mathrm{N}}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$: $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 2

a) Pour tout $t \in [0,1[$, $\arctan(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$. Notons $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,1[$ (car continues sur $[0,1]$) ; $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ et la somme est continue par morceaux. Enfin, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le théorème d'interversion somme / intégrale :

$$\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Exercice 3

a) Soit $x > 1$ fixé. Au voisinage de 0, $\dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{0}{\sim} t^{x-2}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{2-x}}\,\mathrm{d}t$ converge car $2 - x < 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$ donc $\dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-nt}$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,+\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{n^x}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{n^x}$ converge donc le théorème d'interversion somme / intégrale s'applique : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x)\zeta(x)$.

Exercice 4

a) Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n(1+nx)}$. Soit $x > 0$ fixé. Au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, et $f_n'(x) = \dfrac{-1}{(1+nx)^2}$.

Soit $\alpha > 0$. Sur $[\alpha,+\infty[$, $\|f_n'\|_\infty = \dfrac{1}{(1+n\alpha)^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. La convergence est normale donc uniforme sur $[\alpha,+\infty[$ donc le théorème de dérivation s'applique : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par recouvrement.

c) Pour tout $x>0$, $xf(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1/x+n)}=g\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $g(y)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(y)$ et $g_n(y)=\frac{1}{n(y+n)}$.

Sur $[0,+\infty[$, $\|g_n\|_\infty=\frac{1}{n^2}$ donc la convergence de $\sum g_n$ est normale, et donc uniforme sur $[0,+\infty[$. Les fonctions g_n étant continues, il en est de même de g, et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to0}g(y)=g(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, ce qui prouve que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6x}$.

Exercice 5

a) Soit $\alpha>0$. Les fonctions f_n sont continues sur cet intervalle, et $\|f_n\|_\infty=f_n(\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{\alpha}{n!}$. La série $\sum\frac{1}{n!}$ converge donc la convergence est normale, donc uniforme sur $[\alpha,+\infty[$. On en déduit que S est continue sur $[\alpha,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$ par recouvrement. De plus, chacune des fonctions f_n est décroissante, donc S est décroissante sur cet intervalle.

b) On a $f_n(x+1)=\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k+1}=\prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{x+k}=xf_{n+1}(x)$ donc $\mathrm{S}(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}xf_n(x)=x\big(\mathrm{S}(x)-f_0(x)\big)=x\mathrm{S}(x)-1$.

c) S est continue en 1 donc $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{S}(x+1)=\mathrm{S}(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\mathrm{e}-1$ et d'après la question précédente, $\mathrm{S}(x)\underset{0}{\sim}\frac{\mathrm{e}}{x}$.

S est décroissante et positive donc $0\leqslant\mathrm{S}(x+1)\leqslant\mathrm{S}(x)$, soit encore $0\leqslant x\mathrm{S}(x)-1\leqslant\mathrm{S}(x)$. Cette double inégalité s'écrit encore $\frac{1}{x}\leqslant\mathrm{S}(x)\leqslant\frac{1}{x-1}$, et donc $\mathrm{S}(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

Exercice 6

a) On calcule $g_n'(x)=(1-x)^{n-1}x^{\alpha-1}\big(\alpha-(n+\alpha)x\big)$. D'où les variations :

x	0		$\frac{\alpha}{n+\alpha}$		1
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On en déduit $\|g_n\|_\infty=g_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)=\left(1-\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)\right)\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha\sim\frac{\alpha^\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha}}{n^\alpha}$ et $\sum\|g_n\|_\infty$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

b) $\sum\|g_n\|_\infty$ converge donc $\lim\|g_n\|_\infty=0$. Or $|f(0)|=|g_n(0)|\leqslant\|g_n\|_\infty$ donc $f(0)=0$.

$\left|g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\|g_n\|_\infty$ donc $\sum g_n\left(\frac{1}{n}\right)$ converge absolument. Or $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{\mathrm{e}}f\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge absolument.

Si $f'(0)\neq0$ on a $f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{f'(0)}{n}$. Mais la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc $f'(0)=0$.

c) D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x\in[0,1]$, $|f(x)|\leqslant\mathrm{M}x^2$ avec $\mathrm{M}=\frac{\|f''\|_\infty}{2}$.

Ainsi, pour tout $x\in[0,1]$, $|g_n(x)|\leqslant\mathrm{M}(1-x)^nx^2=h_n(x)$, et $\|g_n\|_\infty\leqslant\|h_n\|_\infty$ Mais d'après 6a, la série $\sum h_n$ converge normalement sur $[0,1]$; il en est donc de même de $\sum g_n$.