Suites et séries numériques

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Définitions

À $\sum u_n$ est associée la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

En cas de CV on associe à $\sum u_n$ la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Définitions

À $\sum u_n$ est associée la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

En cas de CV on associe à $\sum u_n$ la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

On a $\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$ et $\boxed{u_n = R_{n-1} - R_n}$ (en cas de CV).

Définitions

À $\sum u_n$ est associée la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

En cas de CV on associe à $\sum u_n$ la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

On a $\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$ et $\boxed{u_n = R_{n-1} - R_n}$ (en cas de CV).

Correspondance fondamentale entre suites et séries

La suite (a_n) converge si et seulement si la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge, et

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Première idée : critère de d'Alembert ; Est-ce une bonne idée ?

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Première idée : critère de d'Alembert ; Est-ce une bonne idée ? Non car :

- si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\lim a_n = 0$;
- si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors ??? ;
- si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ alors $\lim a_n = +\infty$.

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Première idée : critère de d'Alembert ; Est-ce une bonne idée ? Non car :

- si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\lim a_n = 0$;
- si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors ??? ;
- si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ alors $\lim a_n = +\infty$.

Mais c'est une bonne idée si on veut calculer le rayon de CV de $\sum a_n z^n$.

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Deuxième idée : on utilise le log ($k > 0$) et la correspondance suite / série (on ne demande pas la valeur de k).

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Deuxième idée : on utilise le log ($k > 0$) et la correspondance suite / série (on ne demande pas la valeur de k).

$\ln(a_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln n$ donc :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Deuxième idée : on utilise le log ($k > 0$) et la correspondance suite / série (on ne demande pas la valeur de k).

$\ln(a_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln n$ donc :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).$
- $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$; insuffisant pour conclure.

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Deuxième idée : on utilise le log ($k > 0$) et la correspondance suite / série (on ne demande pas la valeur de k).

$\ln(a_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln n$ donc :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
- $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
- $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; $\sum\big(\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)\big)$ CVA donc CV.

Correspondance entre suites et séries

Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers un réel $k > 0$.

Deuxième idée : on utilise le log ($k > 0$) et la correspondance suite / série (on ne demande pas la valeur de k).

$\ln(a_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln n$ donc :

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
- $\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$
- $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; $\sum\big(\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)\big)$ CVA donc CV.

Donc la suite $\big(\ln(a_n)\big)$ CV vers $\ell \in \mathbb{R}$, et la suite (a_n) CV vers $k = \mathrm{e}^{\ell} > 0$.

Convergence absolue, série à termes positifs

La CV de $\sum |u_n|$ entraîne la CV de $\sum u_n$. La réciproque est fausse.

Convergence absolue, série à termes positifs

La CV de $\sum |u_n|$ entraîne la CV de $\sum u_n$. La réciproque est fausse.

Lorsque $u_n \geqslant 0$, la suite (S_n) est croissante donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge ssi la suite } (S_n) \text{ est majorée.}}$$

Convergence absolue, série à termes positifs

La CV de $\sum |u_n|$ entraîne la CV de $\sum u_n$. La réciproque est fausse.

Lorsque $u_n \geqslant 0$, la suite (S_n) est croissante donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge ssi la suite } (S_n) \text{ est majorée.}}$$

Schéma de convergence / divergence

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \sum |v_n| \text{ CV} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum |u_n| \text{ CV} \qquad \left.\begin{array}{l} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \sum |u_n| \text{ DV} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum |v_n| \text{ DV}$$

Convergence absolue, série à termes positifs

La CV de $\sum |u_n|$ entraîne la CV de $\sum u_n$. La réciproque est fausse.

Lorsque $u_n \geqslant 0$, la suite (S_n) est croissante donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge ssi la suite } (S_n) \text{ est majorée.}}$$

Schéma de convergence / divergence

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \sum |v_n| \text{ CV} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum |u_n| \text{ CV} \qquad \left.\begin{array}{l} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \sum |u_n| \text{ DV} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum |v_n| \text{ DV}$$

Lorsque $u_n \sim v_n$, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont de même nature.

Convergence absolue, série à termes positifs

La CV de $\sum |u_n|$ entraîne la CV de $\sum u_n$. La réciproque est fausse.

Lorsque $u_n \geqslant 0$, la suite (S_n) est croissante donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge ssi la suite } (S_n) \text{ est majorée.}}$$

Schéma de convergence / divergence

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \sum |v_n| \text{ CV} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum |u_n| \text{ CV} \qquad \left.\begin{array}{l} u_n = \mathrm{O}(v_n) \\ \sum |u_n| \text{ DV} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum |v_n| \text{ DV}$$

Lorsque $u_n \sim v_n$, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont de même nature.

Règle de d'Alembert

Si $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$, alors $\ell < 1 \Longrightarrow \sum |u_n|$ CV et $\ell > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ DVG.

Schéma de convergence et de divergence

Soit P un polynôme non nul, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer la nature de la série $\sum P(n)\mathrm{e}^{-\alpha n}$.

Schéma de convergence et de divergence

Soit P un polynôme non nul, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer la nature de la série $\sum P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}$.

- Si $\alpha > 0$, on choisit β tel que $0 < \beta < \alpha$. Alors $P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n} = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\beta n})$ donc $\sum P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}$ CVA. En effet, $\dfrac{P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\mathrm{e}^{-\beta n}} = P(n)\,\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Schéma de convergence et de divergence

Soit P un polynôme non nul, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer la nature de la série $\sum P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}$.

- Si $\alpha > 0$, on choisit β tel que $0 < \beta < \alpha$. Alors $P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n} = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\beta n})$ donc $\sum P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}$ CVA. En effet, $\dfrac{P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\mathrm{e}^{-\beta n}} = P(n)\,\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $\alpha \leqslant 0$, $\sum P(n)\,\mathrm{e}^{-\alpha n}$ diverge grossièrement.

Schéma de convergence et de divergence

Séries de Bertrand

Nature des séries de Bertrand $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Schéma de convergence et de divergence

Séries de Bertrand

Nature des séries de Bertrand $\sum \dfrac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 1$, $\dfrac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{\gamma}}\right)$ avec $1 < \gamma < \alpha$ donc CV ;

Schéma de convergence et de divergence

Séries de Bertrand

Nature des séries de Bertrand $\sum \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 1$, $\dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $1 < \gamma < \alpha$ donc CV ;
- Si $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{n^\gamma} = \mathrm{O}\left(\dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha < \gamma < 1$ donc DV ;

Schéma de convergence et de divergence

Séries de Bertrand

Nature des séries de Bertrand $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 1$, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $1 < \gamma < \alpha$ donc CV ;
- Si $\alpha < 1$, $\frac{1}{n^\gamma} = \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha < \gamma < 1$ donc DV ;
- Si $\alpha = 1$ et $\beta \geqslant 0$, $\frac{1}{n} = \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n}\right)$ avec donc DV ;

Schéma de convergence et de divergence

Séries de Bertrand

Nature des séries de Bertrand $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 1$, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $1 < \gamma < \alpha$ donc CV ;
- Si $\alpha < 1$, $\frac{1}{n^\gamma} = \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha < \gamma < 1$ donc DV ;
- Si $\alpha = 1$ et $\beta \geqslant 0$, $\frac{1}{n} = \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^\beta}{n}\right)$ avec donc DV ;
- Si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$, comparaison à une intégrale :

$$\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n} \text{ a même nature que } \int_2^{+\infty} \frac{(\ln t)^\beta}{t}\,\mathrm{d}t \text{ donc CV ssi } \beta < -1.$$

Séries alternées

Lorsque la suite (a_n) décroit et tend vers 0,

- la suite $\sum (-1)^n a_n$ converge ;
- $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}$ (très utile pour les séries de fonctions).

En outre, R_n et a_{n+1} sont de même signe.

Séries alternées

Lorsque la suite (a_n) décroit et tend vers 0,

- la suite $\sum (-1)^n a_n$ converge ;
- $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}$ (très utile pour les séries de fonctions).

En outre, R_n et a_{n+1} sont de même signe.

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$?

Séries alternées

Lorsque la suite (a_n) décroit et tend vers 0,

- la suite $\sum (-1)^n a_n$ converge ;
- $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}$ (très utile pour les séries de fonctions).

En outre, R_n et a_{n+1} sont de même signe.

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$?

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Séries alternées

Lorsque la suite (a_n) décroit et tend vers 0,

- la suite $\sum (-1)^n a_n$ converge ;
- $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}$ (très utile pour les séries de fonctions).

En outre, R_n et a_{n+1} sont de même signe.

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$?

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = a_n + b_n$$

$\sum a_n$ CV (CSSA) et $\sum b_n$ DV car $b_n \sim -\dfrac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ DV.

Comparaison à une intégrale

Lorsque la fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et décroissante,

$$\sum f(n) \text{ converge ssi } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

De plus,

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comparaison à une intégrale

Lorsque la fonction $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et décroissante,

$$\sum f(n) \text{ converge ssi } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

De plus,

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(0)+\int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$?

Comparaison à une intégrale

Lorsque la fonction $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et décroissante,

$$\sum f(n) \text{ converge ssi } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

De plus,

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$?

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \text{ et } \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \int_2^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$

(attention, $t \mapsto \ln t$ est croissante).

Comparaison à une intégrale

Lorsque la fonction $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et décroissante,

$$\sum f(n) \text{ converge ssi } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

De plus,

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(0)+\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$?

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \text{ et } \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \int_2^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$

(attention, $t \mapsto \ln t$ est croissante).

On en déduit après calcul que $\ln(n!) \sim n \ln n$, puis $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$.

Comparaison à une intégrale

Lorsque la fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et décroissante,

$$\sum f(n) \text{ converge ssi } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

De plus,

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$?

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \text{ et } \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \int_2^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$

(attention, $t \mapsto \ln t$ est croissante).

On en déduit après calcul que $\ln(n!) \sim n \ln n$, puis $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$.

Donc $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 2$ (série de Bertrand).

Produit de Cauchy

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CVA, $\sum w_n$ aussi, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

(On la rencontre surtout dans le cadre des séries entières).

Produit de Cauchy

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CVA, $\sum w_n$ aussi, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

(On la rencontre surtout dans le cadre des séries entières).

Formule de Stirling

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\, n^n.$

Produit de Cauchy

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CVA, $\sum w_n$ aussi, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

(On la rencontre surtout dans le cadre des séries entières).

Formule de Stirling

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\, n^n$.

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$?

Produit de Cauchy

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CVA, $\sum w_n$ aussi, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

(On la rencontre surtout dans le cadre des séries entières).

Formule de Stirling

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\, n^n$.

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$?

Le critère de d'Alembert ne donne rien ($\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$) mais la formule de Stirling donne $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ donc $\sum u_n$ DV.

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = a_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) u_k = A_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_{k+1}.$$

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

Règle d'Abel : si (A_n) est bornée et (u_n) décroissante et convergente vers 0, la série $\sum a_n u_n$ converge.

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

Règle d'Abel : si (A_n) est bornée et (u_n) décroissante et convergente vers 0, la série $\sum a_n u_n$ converge.

$\lim_{n\to+\infty} u_n A_n = 0$ et $|A_k(u_{k+1} - u_k)| \leqslant M(u_k - u_{k+1})$.

$\sum (u_k - u_{k+1})$ CV (télescopage) donc $\sum A_k(u_{k+1} - u_k)$ CVA.

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

Règle d'Abel : si (A_n) est bornée et (u_n) décroissante et convergente vers 0, la série $\sum a_n u_n$ converge.

Ex : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $a_n = e^{in\theta}$ $(\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi)$.

$A_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \implies |A_n| \leqslant \dfrac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ donc $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ CV.

En particulier, $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ converge.

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

C'est l'équivalent d'une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

C'est l'équivalent d'une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$a_n \leftrightarrow \sin t,\quad A_n \leftrightarrow -\cos t,\quad u_n \leftrightarrow \frac{1}{t},\quad u_{n+1} - u_n \leftrightarrow -\frac{1}{t^2}$

Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (u_n) deux suites ; on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = A_n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (u_{k+1} - u_k)$$

C'est l'équivalent d'une intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$a_n \leftrightarrow \sin t, \quad A_n \leftrightarrow -\cos t, \quad u_n \leftrightarrow \frac{1}{t}, \quad u_{n+1} - u_n \leftrightarrow -\frac{1}{t^2}$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ CVA donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ CV.

$\lim A_n u_n = 0$ et $\sum A_n (u_{n+1} - u_n)$ CVA donc $\sum a_n u_n$ CV.