# Séries numériques

## Définitions

À toute série $\sum u_n$ est associée la suite des sommes partielles $(S_n)$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

*En cas de convergence uniquement* on associe à $\sum u_n$ la suite des restes $(R_n)$ définie par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, et en cas de convergence, $u_n = R_{n-1} - R_n$.

### Correspondance fondamentale entre suites et séries

La suite $(a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge, et $a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ (formule du télescopage).

## Convergence absolue

La convergence de $\sum |u_n|$ entraîne la convergence de $\sum u_n$. La réciproque est fausse.

## Séries à termes positifs

Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, la suite $(S_n)$ est croissante donc $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)$ est majorée. Lorsque $u_n = O(v_n)$, La convergence de $\sum |v_n|$ entraîne celle de $\sum |u_n|$. Lorsque $u_n \sim v_n$, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont de même nature.

### Règle de d'Alembert

Lorsque $(u_n)$ ne s'annule pas et $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$, alors $\ell < 1 \implies \sum |u_n|$ converge et $\ell > 1 \implies \sum u_n$ diverge.

## Séries alternées

Lorsque la suite $(a_n)$ décroit et tend vers 0, la suite $\sum (-1)^n a_n$ converge, et $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

## Comparaison à une intégrale

Lorsque la fonction $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ est continue par morceaux et décroissante, $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, on dispose des encadrements :

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(en cas de convergence)}$$

## Produit de Cauchy

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, il en est de même de $\sum w_n$, et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

### Formule de Stirling

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \,\mathrm{e}^{-n}$.