Interrogation sur les séries numériques

Durée : libre

Exercice 1

(1 pt) Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que la série $\sum a_n$ converge, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < 1$.
On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - a_k)$. Montrer que la suite (P_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $0 < \ell < 1$.

Exercice 2

a) (1,5 pts) Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n^{2\alpha}}$.

b) (2 pts) À l'aide de la question précédente, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 3

Soit $\alpha > 1$, et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$. les deux questions sont indépendantes.

a) (1 pt) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum (-1)^n R_n$ converge.

b) (1,5 pts) À l'aide d'une intégrale, déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum R_n$ converge.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite réelle.

a) (1,5 pts) On suppose que la série $\sum |u_n|$ converge. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

b) (1,5 pts) Cette propriété est-elle toujours vraie si on suppose seulement que $\sum u_n$ converge ?

c) (1,5 pts) On suppose que $\sum u_n^2$ converge. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que la série $\sum \dfrac{|u_n|}{n}$ converge.

Exercice 5

(1,5 pts) Soit (A_n) une suite bornée, et (u_n) une suite réelle positive et décroissante.
Montrer que la série $\sum A_n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 6

(1,5 pts) Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, croissante et divergeant vers $+\infty$. En comparant $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ et $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, démontrer que la série $\sum \left(\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}\right)$ diverge.

Exercice 7

(1,5 pts) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application *contractante* : il existe $k \in]0,1[$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, $|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$.
Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$, et en déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 8

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application strictement positive, décroissante et convergeant vers 0 en $+\infty$.

On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k f(k)$.

On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée f' est croissante.

a) (1 pt) Montrer que la suite $\big(f(n) - f(n+1)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

b) (2 pts) Montrer que $|R_n + R_{n+1}| \leqslant f(n) - f(n+1)$ et en déduire que $\sum (R_n + R_{n+1})$ converge.

c) (1 pt) En considérant la série $\sum (R_n - R_{n+1})$, déduire de la question précédente que la série $\sum R_n$ converge.