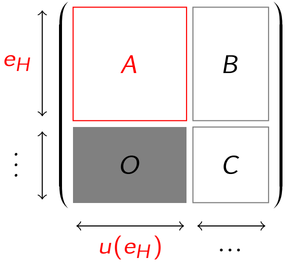
Réduction des endomorphismes

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Sous-espaces stables

Si H est un sous-espace vectoriel stable par u et (e) une base adaptée à H, alors

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \mathrm{Mat}_{(e_H)}(u_H).$$



(e_H) désigne une base de H.
$u_H \in \mathcal{L}(H)$ est la restriction de u à H.

Sous-espaces stables

Si $E = \bigoplus H_i$ où les H_i sont stables par u, alors dans une base (e) adaptée à cette décomposition,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k) \quad \text{avec} \quad A_i = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(u_{H_i}).$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Sous-espaces stables

Si $E = \bigoplus H_i$ où les H_i sont stables par u, alors dans une base (e) adaptée à cette décomposition,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_k) \quad \text{avec} \quad A_i = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(u_{H_i}).$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Réduire un endomorphisme, c'est trouver une telle décomposition de l'espace, avec u_{H_i} / A_i aussi simple que possible :

$u_i = \lambda_i \mathrm{Id}$ (homothétie) ou $u_i = \lambda_i \mathrm{Id} + n_i$ (homothétie + nilpotent, HP)

Sous-espaces stables

Si $E = \bigoplus H_i$ où les H_i sont stables par u, alors dans une base (e) adaptée à cette décomposition,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_k) \quad \text{avec} \quad A_i = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(u_{H_i}).$$

Cas de la trigonalisation :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{est semblable à} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- $\dim H_1 = 2$, $u_1 = \mathrm{Id} + n_1$ avec n_1 nilpotent ;
- $\dim H_2 = 1$, $u_2 = 2\mathrm{Id}$.

Réduire un endomorphisme, c'est trouver une telle décomposition de l'espace, avec u_{H_i} / A_i aussi simple que possible :

$u_i = \lambda_i \mathrm{Id}$ (homothétie) ou $u_i = \lambda_i \mathrm{Id} + n_i$ (homothétie + nilpotent, HP)

Sous-espaces stables

Des exercices en général difficiles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.

Sous-espaces stables

Des exercices en général difficiles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.

Quelles sont les droites stables par u ?

Sous-espaces stables

Des exercices en général difficiles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.

Quelles sont les droites stables par u ? $\rightarrow$ les droites engendrées par des vecteurs propres.

Sous-espaces stables

Des exercices en général difficiles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.

Quelles sont les droites stables par u ? $\rightarrow$ les droites engendrées par des vecteurs propres.

Si u possède une valeur propre, le problème est réglé. Dans le cas contraire, on plonge dans $\mathbb{C}$ grace à une interprétation matricielle de l'exercice :

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle sans valeur propre. Montrer qu'il existe au moins un plan stable par A.

Sous-espaces stables

Des exercices en général difficiles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.

Quelles sont les droites stables par u ? $\rightarrow$ les droites engendrées par des vecteurs propres.
Si u possède une valeur propre, le problème est réglé. Dans le cas contraire, on plonge dans $\mathbb{C}$ grace à une interprétation matricielle de l'exercice :

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle sans valeur propre. Montrer qu'il existe au moins un plan stable par A.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^{2n}$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
On pose $X = Y + iZ$, $\lambda = a + ib$. Alors :

Sous-espaces stables

Des exercices en général difficiles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.

Quelles sont les droites stables par u ? $\rightarrow$ les droites engendrées par des vecteurs propres.

Si u possède une valeur propre, le problème est réglé. Dans le cas contraire, on plonge dans $\mathbb{C}$ grace à une interprétation matricielle de l'exercice :

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle sans valeur propre. Montrer qu'il existe au moins un plan stable par A.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^{2n}$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
On pose $X = Y + iZ$, $\lambda = a + ib$. Alors :

$$A(Y + iZ) = (a + ib)(Y + iZ) \iff \begin{cases} AY = aY - bZ \\ AZ = bY + aZ \end{cases}$$

donc $\text{Vect}(Y, Z)$ est stable par A.

Polynôme caractéristique

$$\chi_u(x) = \det(x\mathrm{Id} - u) = x^n - (\operatorname{tr} u)x^{n-1} + \cdots ? \cdots + (-1)^n \det u.$$

- Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u.
- Si $\chi_u(x) = (x - \lambda)^{n_\lambda} Q(x)$ alors $\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})) \leqslant n_\lambda$.

Polynôme caractéristique

$$\chi_u(x) = \det(x\mathrm{Id} - u) = x^n - (\operatorname{tr} u)x^{n-1} + \cdots ? \cdots + (-1)^n \det u.$$

- Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u.
- Si $\chi_u(x) = (x-\lambda)^{n_\lambda} Q(x)$ alors $\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})) \leqslant n_\lambda$.
- Lorsque $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ est scindé (**tjs vrai lorsque** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$),

$$\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Chaque valeur propre apparait autant de fois que sa multiplicité.

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{tr}(A^n) z^n$, puis exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$, puis exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

On pose $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (répétées avec multiplicité).

A est trigonalisable donc $\operatorname{tr}(A^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n$.

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{tr}(A^n) z^n$, puis exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

On pose $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (répétées avec multiplicité).

A est trigonalisable donc $\mathrm{tr}(A^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^n) z^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_k z} \text{ lorsque}$$

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$, puis exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

On pose $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (répétées avec multiplicité).

A est trigonalisable donc $\operatorname{tr}(A^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n) z^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1 - \lambda_k z} \text{ lorsque } \forall k \in [\![1, p]\!], |z| \leqslant \frac{1}{|\lambda_k|}$$

donc $R = \dfrac{1}{\max |\lambda_k|}$.

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$, puis exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

On pose $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (répétées avec multiplicité).

A est trigonalisable donc $\operatorname{tr}(A^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n) z^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_k z} \text{ lorsque } \forall k \in [\![1,p]\!], |z| \leqslant \frac{1}{|\lambda_k|}$$

donc $R = \dfrac{1}{\max|\lambda_k|}$.

Par ailleurs, $\chi_A(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)$ donc $\dfrac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} =$

Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^n)z^n$, puis exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

On pose $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (répétées avec multiplicité).

A est trigonalisable donc $\operatorname{tr}(A^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)z^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_k z)^n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-\lambda_k z} \text{ lorsque } \forall k \in [\![1,p]\!], |z| \leqslant \frac{1}{|\lambda_k|}$$

donc $R = \dfrac{1}{\max|\lambda_k|}$.

Par ailleurs, $\chi_A(z) = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_p)$ donc $\dfrac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{z-\lambda_k}$ et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)z^n = \frac{\chi_A'(1/z)}{z\chi_A(1/z)}.$$

Diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réalisée :

- il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale ;

Diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réalisée :

- il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale ;
- il existe une base (e) formée de vecteurs propres de u ;

Diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réalisée :

- il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale ;
- il existe une base (e) formée de vecteurs propres de u ;
- $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$;

Diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réalisée :

- il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale ;
- il existe une base (e) formée de vecteurs propres de u ;
- $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$;
- χ_u est scindé et pour toute valeur propre, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})) = n_\lambda$.

Diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réalisée :

- il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale ;
- il existe une base (e) formée de vecteurs propres de u ;
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$;
- χ_u est scindé et pour toute valeur propre, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})) = n_\lambda$.

Cas particulier : si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.

Diagonalisabilité

Un exercice difficile mais classique

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, et $B = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que B est diagonalisable.

Diagonalisabilité

Un exercice difficile mais classique

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, et $B = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que B est diagonalisable.

Résoudre le système $B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Diagonalisabilité

Un exercice difficile mais classique

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, et $B = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que B est diagonalisable.

Résoudre le système $B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} AX = \lambda^2 X \\ Y = \lambda X \end{cases}$

Diagonalisabilité

Un exercice difficile mais classique

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, et $B = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que B est diagonalisable.

Résoudre le système $B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} AX = \lambda^2 X \\ Y = \lambda X \end{cases}$

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de v.p. de A : $AX_k = \mu_k X_k$ avec $\mu_k \neq 0$.

On note λ_k une racine carrée de μ_k, $Z_k = \begin{pmatrix} X_k \\ \lambda_k X_k \end{pmatrix}$, $\widetilde{Z}_k = \begin{pmatrix} X_k \\ -\lambda_k X_k \end{pmatrix}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k Z_k + b_k \widetilde{Z}_k) = 0 \iff$$

Diagonalisabilité

Un exercice difficile mais classique

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, et $B = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que B est diagonalisable.

Résoudre le système $B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} AX = \lambda^2 X \\ Y = \lambda X \end{cases}$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de v.p. de A : $AX_k = \mu_k X_k$ avec $\mu_k \neq 0$.

On note λ_k une racine carrée de μ_k, $Z_k = \begin{pmatrix} X_k \\ \lambda_k X_k \end{pmatrix}$, $\widetilde{Z}_k = \begin{pmatrix} X_k \\ -\lambda_k X_k \end{pmatrix}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k Z_k + b_k \widetilde{Z}_k) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) X_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - b_k) X_k = 0$$

Diagonalisabilité

Un exercice difficile mais classique

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ inversible et diagonalisable, et $B = \begin{pmatrix} O & I \\ A & O \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que B est diagonalisable.

Résoudre le système $B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} AX = \lambda^2 X \\ Y = \lambda X \end{cases}$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de v.p. de A : $AX_k = \mu_k X_k$ avec $\mu_k \neq 0$.

On note λ_k une racine carrée de μ_k, $Z_k = \begin{pmatrix} X_k \\ \lambda_k X_k \end{pmatrix}$, $\widetilde{Z}_k = \begin{pmatrix} X_k \\ -\lambda_k X_k \end{pmatrix}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k Z_k + b_k \widetilde{Z}_k) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) X_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - b_k) X_k = 0$$
$$\iff a_k + b_k = 0 \text{ et } \lambda_k (a_k - b_k) = 0 \iff a_k = b_k = 0 \text{ car } \lambda_k \neq 0.$$

$(Z_k, \widetilde{Z}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de vecteurs propres de B, B est diagonalisable.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

- Si $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$, $u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

- Si $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$, $u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.
- Réciproquement, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ donc pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda \quad \text{avec} \quad x_\lambda \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}).$$

  Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $v(x_\lambda) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ donc

$$u \circ v(x_\lambda) = \lambda v(x_\lambda) = v(\lambda x_\lambda) = v \circ u(x_\lambda)$$

  et par linéarité, $u \circ v(x) = v \circ u(x)$.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

Dans ce cas, dans une base adaptée,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Cette base adaptée est construite en choisissant une base quelconque sur chacun des s.e.v. propre.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

Dans ce cas, dans une base adaptée,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Cas particulier : u et v sont des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

La restriction de v à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ est toujours symétrique, donc on peut choisir une b.o.n. de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ formée de vecteurs propres de v.

Dans ce cas, chaque A_i est diagonale, et u et v sont diagonalisables dans une même base orthonormée.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.
Dans ce cas, dans une base adaptée,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Cas particulier : u et v sont diagonalisables.
On peut procéder de même à condition de démontrer le théorème :

> *La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable.*

(difficile à prouver avec le programme de PC*)

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $u \circ v = v \circ u$ ssi chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

Dans ce cas, dans une base adaptée,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Cas particulier simple : chaque sous-espace propre de u est de dimension 1 (les valeurs propres sont simples). Dans ce cas, v est diagonalisable dans la même base que u.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^e d'une matrice

Trouver les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^{e} d'une matrice

Trouver les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AM = M^4 = MA$ donc les solutions sont dans le commutant de A.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^{e} d'une matrice

Trouver les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AM = M^4 = MA$ donc les solutions sont dans le commutant de A.
On calcule $\chi_A(x) = x(x-8)(x+8)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 8, -8\}$; A est dz avec trois valeurs propres simples : $\exists P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^e d'une matrice

Trouver les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AM = M^4 = MA$ donc les solutions sont dans le commutant de A.
On calcule $\chi_A(x) = x(x-8)(x+8)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 8, -8\}$; A est dz avec trois valeurs propres simples : $\exists P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad M = P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} P^{-1}$$

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^{e} d'une matrice

Trouver les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AM = M^4 = MA$ donc les solutions sont dans le commutant de A.
On calcule $\chi_A(x) = x(x-8)(x+8)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 8, -8\}$; A est dz avec trois valeurs propres simples : $\exists P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad M = P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi, $M^3 = A \iff x^3 = 0,\ y^3 = 8,\ z^3 = -8 \iff x = 0,\ y = 2,\ z = -2.$

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^e d'une matrice

Trouver les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AM = M^4 = MA$ donc les solutions sont dans le commutant de A.
On calcule $\chi_A(x) = x(x-8)(x+8)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 8, -8\}$; A est dz avec trois valeurs propres simples : $\exists P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad M = P \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi, $M^3 = A \iff x^3 = 0,\ y^3 = 8,\ z^3 = -8 \iff x = 0,\ y = 2,\ z = -2$.
Pour terminer l'exercice, il reste à calculer P puis M.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^e d'une matrice symétrique

Rappel : deux endomorphismes symétriques qui commutent se diagonalisent sur une même base.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^e d'une matrice symétrique

Rappel : deux endomorphismes symétriques qui commutent se diagonalisent sur une même base.

Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle M telle que $M^3 = A$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = a$ possède une unique solution réelle.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^{e} d'une matrice symétrique

Rappel : deux endomorphismes symétriques qui commutent se diagonalisent sur une même base.

Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle M telle que $M^3 = A$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = a$ possède une unique solution réelle.

Soit A une matrice symétrique réelle positive ($\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$). Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle positive telle que $M^2 = A$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, l'équation $x^2 = a$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Racine n^e d'une matrice symétrique

Rappel : deux endomorphismes symétriques qui commutent se diagonalisent sur une même base.

Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle M telle que $M^3 = A$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = a$ possède une unique solution réelle.

Soit A une matrice symétrique réelle positive ($\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$). Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle positive telle que $M^2 = A$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, l'équation $x^2 = a$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

Attention : ces deux équations peuvent avoir d'autres solutions, mais elle ne seront pas des matrices symétriques.

Trigonalisation

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (**toujours vrai lorsque** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Lorsque $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est triangulaire, les valeurs propres apparaissent sur la diagonale avec leur multiplicité.

Trigonalisation

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (**toujours vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**).

Lorsque $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est triangulaire, les valeurs propres apparaissent sur la diagonale avec leur multiplicité.
Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable, A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants (résultat admis) :

- $\chi_A(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ (deux s.e.p. de dimension 1).

Trigonalisation

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (**toujours vrai lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$**).

Lorsque $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est triangulaire, les valeurs propres apparaissent sur la diagonale avec leur multiplicité.
Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable, A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants (résultat admis) :

- $\chi_A(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ (deux s.e.p. de dimension 1).
- $\chi_A(x) = (x-\lambda)^3$: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (un s.e.p. de dimension 2).

Trigonalisation

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (**toujours vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**).

Lorsque $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est triangulaire, les valeurs propres apparaissent sur la diagonale avec leur multiplicité.
Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable, A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants (résultat admis) :

- $\chi_A(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ (deux s.e.p. de dimension 1).
- $\chi_A(x) = (x-\lambda)^3$: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (un s.e.p. de dimension 2).
- $\chi_A(x) = (x-\lambda)^3$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (un s.e.p. de dimension 1).