

INTERROGATION SUR LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Durée : libre

Exercice 1

(1 pt) Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\text{tr} A = 0$.

Exercice 2

(1,5 pts) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg} u = 1$.
Montrer que $\text{Im} u \subset \text{Ker} u$ si et seulement si u n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

(1,5 pts) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice sans valeur propre réelle. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 4

(1,5 pts) Soit $A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Montrer que si B est diagonalisable, il en est de même de A .

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

a) (1,5 pts) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

b) (1 pt) En déduire que u est nilpotent.

Indication. Considérer l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(w) = w \circ v - v \circ w$.

Exercice 6

Soit $n \geq 2$ et $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \hline b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$. On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$.

a) (1,5 pts) Montrer que $\chi_M(x) = x^n - \lambda x^{n-2}$.

b) (2 pts) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que M soit diagonalisable.

Exercice 7

On considère un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension 3, et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_u(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$, avec $\lambda \neq \mu$.

a) (1 pt) Montrer l'existence d'une base (e_1, e_2, e_3) telle que $\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b) (1 pt) En déduire que $(u - \lambda \text{Id})^2$ est de rang 1.

c) (1 pt) Montrer que $\text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$ est un plan stable par u .

d) (1,5 pts) **Difficile.** On suppose de plus u non diagonalisable.
Montrer l'existence d'une base $(e') = (e_1, e_2, e'_3)$ telle que $\text{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) (1 pt) Montrer que u admet au moins une droite stable par u .

b) (1,5 pts) On suppose u diagonalisable et on considère une base (e) de vecteurs propres de u .

Montrer que tout sous-espace F de E possède un supplémentaire G stable par u .

Indication. Utiliser le théorème de la base incomplète.

c) (1,5 pts) **Difficile.** On suppose que dans E , tout sous-espace vectoriel stable par u possède un supplémentaire stable par u . Montrer que u est diagonalisable.