Corrigé : interrogation sur la réduction des endomorphismes

Exercice 1

Si $A^2 = A$, A est la matrice d'une projection vectorielle donc est semblable à une matrice de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \qquad \text{avec } r = \operatorname{rg} A$$

Ainsi, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = r = \operatorname{rg} A$ donc $r = 0$, et $A = 0$.

Exercice 2

Dans une base adaptée à $\operatorname{Im} u$ on a $\operatorname{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, avec $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1)$. Ainsi, $\chi_U(x) = x^{n-1}(x - a_1)$.

Si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ on a $a_1 = 0$ et $\operatorname{Sp}(u) = \{0\}$ donc u n'est pas diagonalisable : sa seule valeur propre 0 est associée à un sous-espace propre de dimension $n-1$.
Si $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ on a $a_1 \neq 0$ et $\operatorname{Sp}(u) = \{0, a_1\}$ donc u est diagonalisable : 0 est associé à un sous-espace propre de dimension $n-1$ et a_1 à un sous-espace propre de dimension 1 (valeur propre simple).

Exercice 3

χ_A est un polynôme réel de degré n sans racine réelle donc n est nécessairement pair et $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{n_i} (x - \overline{\lambda}_i)^{n_i}$ où les λ_i sont complexes non réels.
$\det A$ est le produit des valeurs propres complexes (comptées avec leurs multiplicités) donc

$$\det A = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i \overline{\lambda}_i)^{n_i} = \prod_{i=1}^{p} |\lambda_i|^{2n_i} > 0.$$

Exercice 4

Il existe $P \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ diagonale tel que $B = PDP^{-1}$.
En posant $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ on a $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ et $A = Q \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right) Q^{-1}$ donc A est diagonalisable.

Exercice 5

a) On raisonne par récurrence sur k.

- Si $k = 1$ le résultat est évident.
- Si $k \geqslant 2$, on suppose $u^{k-1} \circ v - v \circ u^{k-1} = (k-1)u^{k-1}$. Alors

$$u^k \circ v - v \circ u^k = u \circ (u^{k-1} \circ v - v \circ u^{k-1} + v \circ u^{k-1}) - v \circ u^k = (k-1)u^k + (u \circ v - v \circ u) \circ u^{k-1} = (k-1)u^k + u^k = ku^k$$

  donc la récurrence se propage.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi(u^k) = ku^k$ donc si u^k est non nul, k est valeur propre de ϕ. Mais ϕ ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres, donc il existe un rang à partir duquel $u^k = 0$, et u est nilpotent.

Exercice 6

a) $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x & a_{n-1} \\ b_1 & \cdots & b_{n-1} & x \end{vmatrix}$. Lorsque $x \neq 0$, on effectue l'opération élémentaire $C_n \leftarrow C_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{x} C_i$. On obtient une matrice triangulaire inférieure dont le déterminant vaut : $\chi_M(x) = x^{n-1}\Big(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i b_i}{x}\Big) = x^n - \lambda x^{n-2}$. Cette formule reste vraie pour $x = 0$ puisque deux polynômes égaux sur $\mathbb{R}^*$ le sont aussi sur $\mathbb{R}$.

b) Si $\lambda \neq 0$ on note μ l'une de ses deux racines carrées. Alors $\chi_M(x) = x^{n-2}(x-\mu)(x+\mu)$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \mu, -\mu\}$. La matrice M est de rang 2 donc $\dim(\mathrm{Ker}\, M) = n-2$, ce qui montre que M est diagonalisable.
Si $\lambda = 0$ alors $\chi_M(x) = x^n$ et $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Mais M n'est pas la matrice nulle, donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice 7

a) $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ donc on peut choisir pour e_1 un vecteur propre associé à μ, pour e_2 un vecteur propre associé à λ, et compléter par e_3 pour obtenir une base de E. Sachant que $\mathrm{tr}\, u = \mu + 2\lambda$ on a nécessairement $u(e_3) = \ldots e_1 + \ldots e_2 + \lambda e_3$.

b) On a $\mathrm{Mat}_{(e)}(u - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} \mu-\lambda & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en élevant au carré, $\mathrm{Mat}_{(e)}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big) = \begin{pmatrix} (\mu-\lambda)^2 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\mathrm{rg}(u - \lambda\mathrm{Id})^2 = 1$.

c) D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big)$ est un plan ; de plus, pour tout $x \in \mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big)$, $(u-\lambda\mathrm{Id})^2 \circ u(x) = u \circ (u-\lambda\mathrm{Id})^2(x) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big)$. Ce plan est bien stable par u.

d) On a $e_2 \in \mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big)$ car $(u-\lambda\mathrm{Id})(e_2) = 0_E$; soit $b \in E$ tel que (e_2, b) soit une base de $\mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big)$.
On a $e_1 \notin \mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big)$ car $(u-\lambda\mathrm{Id})^2(e_1) = (\mu-\lambda)^2 e_1 \neq 0_E$ donc (e_1, e_2, b) est une base de E.

On a $u(b) \in \mathrm{Ker}\Big((u-\lambda\mathrm{Id})^2\Big) = \mathrm{Vect}(e_2, b)$ par stabilité donc $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,b)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Enfin, $\alpha \neq 0$ car u n'est pas diagonalisable, donc en posant $e_3' = \frac{1}{\alpha} b$ on a $u(e_3') = e_2 + \lambda e_3'$.

Exercice 8

a) Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tout endomorphisme possède au moins une valeur propre (cas son polynôme caractéristique est scindé), et un vecteur propre engendre une droite stable par u.

b) Soit $(b_1, \ldots, b_k)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille libre par des vecteurs $(e_{i_{k+1}}, \ldots, e_{i_n})$ extraits de la famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $G = \mathrm{Vect}(e_{i_{k+1}}, \ldots, e_{i_n})$ est un supplémentaire de F stable par u.

c) On raisonne par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, tout endomorphisme est diagonalisable.
- Si $n \geqslant 1$, on suppose le résultat acquis au rang $n-1$. d'après la première question, il existe une droite F stable par u. Par hypothèse, F possède un supplémentaire G stable par u. On note u_G l'induit de u sur G.
  Dans G, tout sous-espace vectoriel H stable par u_G possède un supplémentaire stable par u_G : en effet, par hypothèse il existe K stable par u tel que $E = H \oplus K$, et en posant $K' = K \cap G$ on a K' stable par u_G et $G = H \oplus K'$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire que u_G est diagonalisable. On en déduit que u est diagonalisable (c'est la situation décrite dans l'exercice 4). La récurrence se propage.