Probabilités

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers, $\mathscr{A}$ une tribu, $\mathbb{P}$ une probabilité.

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers, $\mathscr{A}$ une tribu, $\mathbb{P}$ une probabilité.

- Ω est l'univers des possibles (les résultats d'une expérience);

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers, $\mathscr{A}$ une tribu, $\mathbb{P}$ une probabilité.

- Ω est l'univers des possibles (les résultats d'une expérience) ;
- $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements (mesurables) ;

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers, $\mathscr{A}$ une tribu, $\mathbb{P}$ une probabilité.

- Ω est l'univers des possibles (les résultats d'une expérience);
- $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements (mesurables);
- $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ attribue à chaque événement une probabilité.

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers, $\mathscr{A}$ une tribu, $\mathbb{P}$ une probabilité.

- Ω est l'univers des possibles (les résultats d'une expérience) ;
- $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements (mesurables) ;
- $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ attribue à chaque événement une probabilité.

$$\mathscr{A} \text{ est une tribu lorsque } \begin{cases} \Omega \in \mathscr{A} \\ A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A} \\ (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A} \end{cases}$$

Conséquences : $\varnothing \in \mathscr{A}$ et $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers, $\mathscr{A}$ une tribu, $\mathbb{P}$ une probabilité.

- Ω est l'univers des possibles (les résultats d'une expérience) ;
- $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements (mesurables) ;
- $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ attribue à chaque événement une probabilité.

$\mathbb{P}$ est une probabilité lorsque

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \text{si } i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \end{cases}$$

Conséquences :

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;
- une implication correspond à

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;
- une implication correspond à une inclusion.

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire;
- un il existe correspond à une union;
- un pour tout correspond à une intersection;
- une implication correspond à une inclusion.

Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que «seul un nombre fini d'événements parmi les A_n sont réalisés» est un événement.

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;
- une implication correspond à une inclusion.

Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que «seul un nombre fini d'événements parmi les A_n sont réalisés» est un événement.

Soit $\omega \in \Omega$. On traduit : $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geqslant n,\ \omega \notin A_k$

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;
- une implication correspond à une inclusion.

Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que «seul un nombre fini d'événements parmi les A_n sont réalisés» est un événement.

Soit $\omega \in \Omega$. On traduit :

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} \;\big|\; \forall k \geqslant n,\ \omega \notin A_k \\ \Longleftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \;\big|\; \forall k \geqslant n,\ \omega \in \overline{A}_k \end{aligned}$$

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;
- une implication correspond à une inclusion.

Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que «seul un nombre fini d'événements parmi les A_n sont réalisés» est un événement.

Soit $\omega \in \Omega$. On traduit :

$$
\begin{aligned}
& \exists n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \forall k \geqslant n,\ \omega \notin A_k \\
\Longleftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \forall k \geqslant n,\ \omega \in \overline{A}_k \\
\Longleftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \omega \in \bigcap_{k \geqslant n} \overline{A}_k
\end{aligned}
$$

Espaces probabilisés

Un savoir faire

Pour montrer qu'on est en présence d'un événement, il faut savoir traduire les connecteurs logiques en termes ensemblistes :

- une négation correspond à un passage au complémentaire ;
- un il existe correspond à une union ;
- un pour tout correspond à une intersection ;
- une implication correspond à une inclusion.

Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que «seul un nombre fini d'événements parmi les A_n sont réalisés» est un événement.

Soit $\omega \in \Omega$. On traduit :

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geqslant n,\ \omega \notin A_k \\ \Longleftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geqslant n,\ \omega \in \overline{A}_k \\ \Longleftrightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \mid \omega \in \bigcap_{k \geqslant n} \overline{A}_k \\ \Longleftrightarrow\ & \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcap_{k \geqslant n} \overline{A}_k \Big) \quad \longrightarrow \text{c'est un événement} \end{aligned}$$

Théorèmes de limite monotone

- Si $A_n \subset A_{n+1}$, $\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$;
- Si $A_{n+1} \subset A_n$, $\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Théorèmes de limite monotone

- Si $A_n \subset A_{n+1}$, $\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$;
- Si $A_{n+1} \subset A_n$, $\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Conséquences : dans le cas général,

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(B_n)$ avec $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \quad (B_n \subset B_{n+1})$;
- $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(C_n)$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k \quad (C_{n+1} \subset C_n)$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Remarque : $\omega \in A^* \iff \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p \,\big|\, \omega \in A_n$

A^* est réalisé lorsque un nombre infini de A_n est réalisé.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Remarque : $\omega \in A^* \iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant p \mid \omega \in A_n$
A^* est réalisé lorsque un nombre infini de A_n est réalisé.

$A^* = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} B_p$ avec $B_p = \bigcup_{n \geqslant p} A_n$.
On a $B_p = B_{p+1} \cup A_p$ donc $B_{p+1} \subset B_p$ et $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p)$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Remarque : $\omega \in A^* \iff \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p \;\middle|\; \omega \in A_n$

A^* est réalisé lorsque un nombre infini de A_n est réalisé.

$A^* = \displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p = \displaystyle\bigcup_{n\geqslant p} A_n$.

On a $B_p = B_{p+1} \cup A_p$ donc $B_{p+1} \subset B_p$ et $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p)$.

$$\mathbb{P}(B_p) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_p}) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\Big) = 1 - \prod_{n\geqslant p}\big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big).$$

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Remarque : $\omega \in A^* \iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant p \;\big|\; \omega \in A_n$

A^* est réalisé lorsque un nombre infini de A_n est réalisé.

$A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p = \bigcup_{n\geqslant p} A_n$.

On a $B_p = B_{p+1} \cup A_p$ donc $B_{p+1} \subset B_p$ et $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p)$.

$\mathbb{P}(B_p) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_p}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\right) = 1 - \prod_{n\geqslant p}\big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big)$.

On étudie $\ln\left(\prod_{n\geqslant p}\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big)\right) = \sum_{n\geqslant p} \ln\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big) \longrightarrow$ m̂ nature que $\sum \mathbb{P}(A_n)$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Remarque : $\omega \in A^* \iff \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p \,\big|\, \omega \in A_n$

A^* est réalisé lorsque un nombre infini de A_n est réalisé.

$A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p = \bigcup_{n\geqslant p} A_n$.

On a $B_p = B_{p+1} \cup A_p$ donc $B_{p+1} \subset B_p$ et $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p)$.

$\mathbb{P}(B_p) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_p}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\right) = 1 - \prod_{n\geqslant p}\big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big)$.

On étudie $\ln\left(\prod_{n\geqslant p}\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big)\right) = \sum_{n\geqslant p} \ln\big(1-\mathbb{P}(A_n)\big) \longrightarrow$ m̂ nature que $\sum \mathbb{P}(A_n)$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV alors $\lim_p \sum_{n\geqslant p} \ln\big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) = 0$ donc

  $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p) = 0$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Remarque : $\omega \in A^* \iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant p \,\big|\, \omega \in A_n$

A^* est réalisé lorsque un nombre infini de A_n est réalisé.

$A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$ avec $B_p = \bigcup_{n\geqslant p} A_n$.

On a $B_p = B_{p+1} \cup A_p$ donc $B_{p+1} \subset B_p$ et $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p)$.

$\mathbb{P}(B_p) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_p}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}\right) = 1 - \prod_{n\geqslant p}\left(1 - \mathbb{P}(A_n)\right)$.

On étudie $\ln\left(\prod_{n\geqslant p}\left(1-\mathbb{P}(A_n)\right)\right) = \sum_{n\geqslant p} \ln\left(1-\mathbb{P}(A_n)\right) \longrightarrow$ m̂ nature que $\sum \mathbb{P}(A_n)$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ DV alors $\forall p, \sum_{n\geqslant p} \ln\left(1 - \mathbb{P}(A_n)\right) = -\infty$ donc $\forall p, \mathbb{P}(B_p) = 1$

  et $\mathbb{P}(A^*) = \lim \mathbb{P}(B_p) = 1$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV, $\mathbb{P}(A^*) = 0$.
- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ DV, $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV, $\mathbb{P}(A^*) = 0$.
- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ DV, $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise, en ajoutant une boule blanche après chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois la boule noire ?

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV, $\mathbb{P}(A^*) = 0$.
- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ DV, $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise, en ajoutant une boule blanche après chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois la boule noire ?

$\rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{1+n}$ donc $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV, $\mathbb{P}(A^*) = 0$.
- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ DV, $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise, en ajoutant une boule blanche après chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois la boule noire ?

$\rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{1+n}$ donc $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Même chose mais cette fois en doublant le nombre de boules blanches après chaque tirage.

Espaces probabilisés

Lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants, et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$. Alors $\mathbb{P}(A^*) = 0$ ou $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV, $\mathbb{P}(A^*) = 0$.
- Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ DV, $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue des tirages avec remise, en ajoutant une boule blanche après chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer une infinité de fois la boule noire ?

$\rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{1+n}$ donc $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Même chose mais cette fois en doublant le nombre de boules blanches après chaque tirage.

$\rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{1+2^{n-1}}$ donc $\mathbb{P}(A^*) = 0$.

Espaces probabilisés

Cas d'un univers dénombrable

Si $\Omega = \left\{\omega_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ on peut choisir $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définir $\mathbb{P}$ en posant $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ avec $p_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_n p_n = 1$.

Espaces probabilisés

Cas d'un univers dénombrable

Si $\Omega = \left\{\omega_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ on peut choisir $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définir $\mathbb{P}$ en posant $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ avec $p_n \geqslant 0$ et $\sum_n p_n = 1$.

- Montrer qu'on définit sur $\mathbb{N}$ une probabilité en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\Big(\{n\}\Big) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité qu'un entier soit multiple de k ?

Espaces probabilisés

Cas d'un univers dénombrable

Si $\Omega = \left\{\omega_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ on peut choisir $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définir $\mathbb{P}$ en posant $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ avec $p_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_n p_n = 1$.

- Montrer qu'on définit sur $\mathbb{N}$ une probabilité en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{n\}\big) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité qu'un entier soit multiple de k ?

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^{n+1}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Espaces probabilisés

Cas d'un univers dénombrable

Si $\Omega = \left\{\omega_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ on peut choisir $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définir $\mathbb{P}$ en posant $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ avec $p_n \geqslant 0$ et $\sum_n p_n = 1$.

- Montrer qu'on définit sur $\mathbb{N}$ une probabilité en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{n\}\big) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité qu'un entier soit multiple de k ?

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^{n+1}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.
- $\displaystyle\mathbb{P}(k\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{kn\}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{kn+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = \frac{2^{k-1}}{2^k-1}$.

Pour cette loi, la probabilité qu'un entier soit pair vaut $\dfrac{2}{3}$.

Conditionnement, indépendance

- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.

Conditionnement, indépendance

- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.
- $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements lorsque $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \varnothing$ et $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$.

Conditionnement, indépendance

- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.
- $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements lorsque
$$i \neq j \implies B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \Omega.$$
- **Proba. totales** : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$.

Conditionnement, indépendance

- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.
- $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements lorsque
$$i \neq j \implies B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} B_i = \Omega.$$
- **Proba. totales** : si $(B_i)_{i\in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$.
- **Bayes** : si $(B_i)_{i\in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j\in I} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}$.

Conditionnement, indépendance

- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.
- $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements lorsque
  $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \displaystyle\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega.$
- **Proba. totales** : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$.
- **Bayes** : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}$.
- A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
  Conséquence : $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.
  Si A et B sont indépendants, il en est de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Conditionnement, indépendance

- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.
- $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements lorsque
  $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{et} \quad \displaystyle\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega.$
- **Proba. totales** : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$.
- **Bayes** : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}$.
- A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
  Conséquence : $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.
  Si A et B sont indépendants, il en est de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
- Les (A_n) sont indépendants lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, $\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_k}) = \mathbb{P}(A_{n_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{n_k})$.

Conditionnement, indépendance

On considère une variable aléatoire uniforme $M : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_{ij}(\omega)$ les coefficients de la matrice $M(\omega)$.
Montrer que les n^2 variables aléatoires $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont indépendantes.

Conditionnement, indépendance

On considère une variable aléatoire uniforme $M : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_{ij}(\omega)$ les coefficients de la matrice $M(\omega)$.
Montrer que les n^2 variables aléatoires $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont indépendantes.

$\operatorname{card} \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) = 2^{n^2}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $\mathbb{P}(M = A) = \dfrac{1}{2^{n^2}}$.

Si $\epsilon \in \{-1,1\}$, $\mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon) = \dfrac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Conditionnement, indépendance

On considère une variable aléatoire uniforme $M : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_{ij}(\omega)$ les coefficients de la matrice $M(\omega)$.
Montrer que les n^2 variables aléatoires $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont indépendantes.

$\operatorname{card} \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) = 2^{n^2}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $\mathbb{P}(M = A) = \dfrac{1}{2^{n^2}}$.

Si $\epsilon \in \{-1,1\}$, $\mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon) = \dfrac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

On pose le problème : soit $K \subset [\![1,n]\!]^2$, et $(\epsilon_{ij})_{(i,j)\in K} \in \{-1,1\}^{\operatorname{card} K}$.

À prouver : $\mathbb{P}\Big(M_{ij} = \epsilon_{ij} \;\Big|\; \forall (i,j) \in K\Big) = \displaystyle\prod_{(i,j)\in K} \mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon_{ij})$.

Conditionnement, indépendance

On considère une variable aléatoire uniforme $M : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_{ij}(\omega)$ les coefficients de la matrice $M(\omega)$.
Montrer que les n^2 variables aléatoires $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont indépendantes.

$\operatorname{card} \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) = 2^{n^2}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $\mathbb{P}(M = A) = \dfrac{1}{2^{n^2}}$.

Si $\epsilon \in \{-1,1\}$, $\mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon) = \dfrac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

On pose le problème : soit $K \subset [\![1,n]\!]^2$, et $(\epsilon_{ij})_{(i,j)\in K} \in \{-1,1\}^{\operatorname{card} K}$.

À prouver : $\displaystyle \mathbb{P}\Big(M_{ij} = \epsilon_{ij} \;\Big|\; \forall (i,j) \in K\Big) = \prod_{(i,j)\in K} \mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon_{ij})$.

- $\displaystyle \mathbb{P}\Big(M_{ij} = \epsilon_{ij} \;\Big|\; \forall (i,j) \in K\Big) = \frac{2^{n^2-\operatorname{card} K}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2^{\operatorname{card} K}}$;

Conditionnement, indépendance

On considère une variable aléatoire uniforme $M : \Omega \to \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M_{ij}(\omega)$ les coefficients de la matrice $M(\omega)$.
Montrer que les n^2 variables aléatoires $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont indépendantes.

$\operatorname{card} \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) = 2^{n^2}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $\mathbb{P}(M = A) = \dfrac{1}{2^{n^2}}$.

Si $\epsilon \in \{-1,1\}$, $\mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon) = \dfrac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

On pose le problème : soit $K \subset [\![1,n]\!]^2$, et $(\epsilon_{ij})_{(i,j)\in K} \in \{-1,1\}^{\operatorname{card} K}$.

À prouver : $\mathbb{P}\Big(M_{ij} = \epsilon_{ij} \;\Big|\; \forall (i,j) \in K\Big) = \displaystyle\prod_{(i,j)\in K} \mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon_{ij})$.

- $\mathbb{P}\Big(M_{ij} = \epsilon_{ij} \;\Big|\; \forall (i,j) \in K\Big) = \dfrac{2^{n^2-\operatorname{card} K}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2^{\operatorname{card} K}}$;
- $\displaystyle\prod_{(i,j)\in K} \mathbb{P}(M_{ij} = \epsilon_{ij}) = \prod_{(i,j)\in K} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\operatorname{card} K}}$.

Le plus dur est de poser correctement le problème !

Variables aléatoires

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Variables aléatoires

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
  - Si X est fini on peut écrire $X(\Omega) = \left\{x_0, \dots, x_n\right\}$.
  - Si X est dénombrable $X(\Omega) = \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.
  - Dans tous les cas il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $X(\Omega) \subset \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

Variables aléatoires

- $X:\Omega\to\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\})\in\mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Si $X(\Omega)\subset\left\{x_n\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}$, et $\displaystyle\sum_n p_n=1$ avec $p_n\geqslant 0$, il existe $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(X=x_n)=p_n$.
  Déterminer la loi de X, c'est donner $\left\{x_n\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}$ et $\mathbb{P}(X=x_n)$.

Variables aléatoires

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Si $X(\Omega) \subset \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, et $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geqslant 0$, il existe $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

  Déterminer la loi de X, c'est donner $\left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ et $\mathbb{P}(X = x_n)$.
- La loi conjointe de X et de Y est la loi de (X, Y) ; les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Variables aléatoires

- $X:\Omega\to\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\})\in\mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Si $X(\Omega)\subset\left\{x_n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$, et $\sum\limits_n p_n=1$ avec $p_n\geqslant 0$, il existe $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(X=x_n)=p_n$.
  Déterminer la loi de X, c'est donner $\left\{x_n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ et $\mathbb{P}(X=x_n)$.
- La loi conjointe de X et de Y est la loi de (X,Y) ; les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y.

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=x \text{ et } Y=y) \quad \text{(idem pour } Y\text{)}$$

Variables aléatoires

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Si $X(\Omega) \subset \left\{x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, et $\sum\limits_n p_n = 1$ avec $p_n \geqslant 0$, il existe $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.
  Déterminer la loi de X, c'est donner $\left\{x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ et $\mathbb{P}(X = x_n)$.
- La loi conjointe de X et de Y est la loi de (X, Y) ; les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \quad \text{(idem pour } Y\text{)}$$

- X et Y sont indépendantes si $\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes lorsque

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = x_1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_{n_k} = x_k) = \mathbb{P}(X_{n_1} = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{n_k} = x_k).$$

Variables aléatoires

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$. X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Si $X(\Omega) \subset \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, et $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geqslant 0$, il existe $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.
  Déterminer la loi de X, c'est donner $\left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ et $\mathbb{P}(X = x_n)$.
- La loi conjointe de X et de Y est la loi de (X, Y) ; les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \quad \text{(idem pour } Y\text{)}$$

- X et Y sont indépendantes si $\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes lorsque

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = x_1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_{n_k} = x_k) = \mathbb{P}(X_{n_1} = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{n_k} = x_k).$$

- **Lemme des coalitions (HP)** : si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Loi hypergéométrique

On considère une urne contenant N boules, Np boules blanches et $Nq = N(1-p)$ boules noires, avec $p \in]0,1[$. On effectue un tirage sans remise de n boules, avec $n \leqslant N$, et on note X le nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de X, puis $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

Loi hypergéométrique

On considère une urne contenant N boules, Np boules blanches et $Nq = N(1-p)$ boules noires, avec $p \in]0,1[$. On effectue un tirage sans remise de n boules, avec $n \leqslant N$, et on note X le nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de X, puis $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

$$X(\Omega) = [\![0, \min(n, Np)]\!], \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Loi hypergéométrique

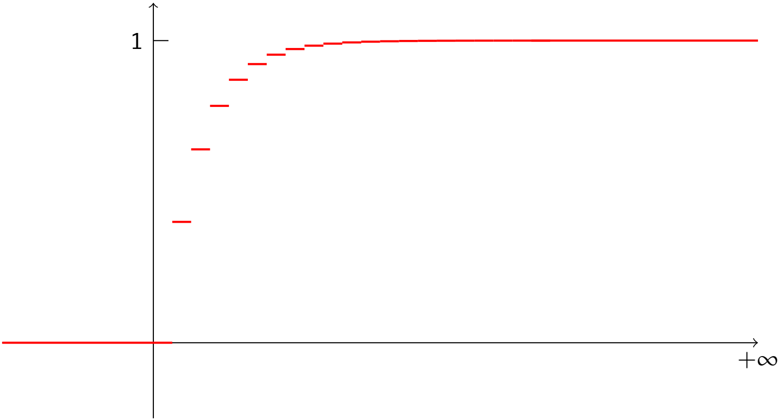
On considère une urne contenant N boules, Np boules blanches et $Nq = N(1-p)$ boules noires, avec $p \in]0,1[$. On effectue un tirage sans remise de n boules, avec $n \leqslant N$, et on note X le nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de X, puis $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

$X(\Omega) = [\![0, \min(n, Np)]\!]$, et $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k} \frac{(Np)!}{(Np-k)!} \frac{(Nq)!}{(Nq-n+k)!} \frac{(N-n)!}{N!} \\
&= \binom{n}{k} \frac{(Np)(Np-1)\cdots(Np-k+1)(Nq)(Nq-1)\cdots(Nq-n+k+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \\
&\underset{N \to +\infty}{\sim} \binom{n}{k} \frac{(Np)^k (Nq)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}
\end{aligned}$$

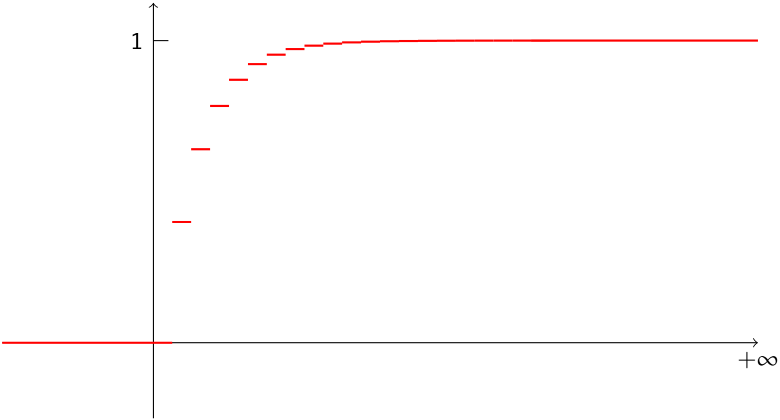
Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire, $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$.



Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire, $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$.



F_X est une fonction croissante, $\lim\limits_{-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X(x) = 1$, en tout point $a \in \mathbb{R}$, F_X est continue à droite et possède une limite à gauche.

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.
  Conséquence. F_X possède des limites à droite et à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$.

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.
  Conséquence. F_X possède des limites à droite et à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$.
  $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \big[X \leqslant -n\big] = \varnothing$ donc (limite monotone) $0 = \lim \mathbb{P}\big(X \leqslant -n\big) = \lim\limits_{-\infty} F_X$.

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.
  Conséquence. F_X possède des limites à droite et à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$.
  $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big[X \leqslant -n\big] = \varnothing$ donc (limite monotone) $0 = \lim \mathbb{P}\big(X \leqslant -n\big) = \lim\limits_{-\infty} F_X$.
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
  $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[X \leqslant n\big] = \Omega$ donc (limite monotone) $1 = \lim \mathbb{P}\big(X \leqslant n\big) = \lim\limits_{+\infty} F_X$.

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.
  Conséquence. F_X possède des limites à droite et à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$.
  $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \big[X \leqslant -n\big] = \varnothing$ donc (limite monotone) $0 = \lim \mathbb{P}\Big(X \leqslant -n\Big) = \lim\limits_{-\infty} F_X$.
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
  $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big[X \leqslant n\big] = \Omega$ donc (limite monotone) $1 = \lim \mathbb{P}\Big(X \leqslant n\Big) = \lim\limits_{+\infty} F_X$.
- F_X est continue à droite et possède une limite à gauche.
  $\big[X \leqslant a\big] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right] \Rightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X\left(a + \dfrac{1}{n}\right) = F_X(a^+)$.

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.
  Conséquence. F_X possède des limites à droite et à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$.
  $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \big[X \leqslant -n\big] = \varnothing$ donc (limite monotone) $0 = \lim \mathbb{P}\big(X \leqslant -n\big) = \lim\limits_{-\infty} F_X$.
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
  $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big[X \leqslant n\big] = \Omega$ donc (limite monotone) $1 = \lim \mathbb{P}\big(X \leqslant n\big) = \lim\limits_{+\infty} F_X$.
- F_X est continue à droite et possède une limite à gauche.
  $$\big[X \leqslant a\big] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = F_X(a^+).$$
  $$\big[X < a\big] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \mathbb{P}(X < a) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) = F_X(a^-).$$

Fonction de répartition

- F_X est croissante.
  Soit $x \leqslant y$. On a $X \leqslant x \implies X \leqslant y$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$.
  Conséquence. F_X possède des limites à droite et à gauche, ainsi qu'en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$.
  $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[X \leqslant -n\right] = \varnothing$ donc (limite monotone) $0 = \lim \mathbb{P}\Big(X \leqslant -n\Big) = \lim\limits_{-\infty} F_X$.
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
  $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[X \leqslant n\right] = \Omega$ donc (limite monotone) $1 = \lim \mathbb{P}\Big(X \leqslant n\Big) = \lim\limits_{+\infty} F_X$.
- F_X est continue à droite et possède une limite à gauche.
  $$\left[X \leqslant a\right] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \mathbb{P}(X \leqslant a) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = F_X(a^+).$$
  $$\left[X < a\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[X \leqslant a - \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \mathbb{P}(X < a) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) = F_X(a^-).$$
  Conséquence : $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a^+) - F_X(a^-)$.

Fonction de répartition

Loi normale (HP)

Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue à droite et telle que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, il existe une variable aléatoire réelle X telle que $F_X = F$ (admis et HP).

Fonction de répartition

Loi normale (HP)

Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue à droite et telle que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, il existe une variable aléatoire réelle X telle que $F_X = F$ (admis et HP).

La loi normale est définie par $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = F_X(x)$.

Fonction de répartition

Loi normale (HP)

Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue à droite et telle que $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$, il existe une variable aléatoire réelle X telle que $F_X = F$ (admis et HP).

La loi normale est définie par $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = F_X(x)$.

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Fonction de répartition

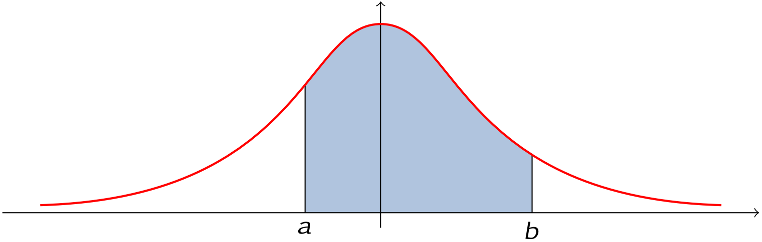
Loi normale (HP)

Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue à droite et telle que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, il existe une variable aléatoire réelle X telle que $F_X = F$ (admis et HP).

La loi normale est définie par $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dt = F_X(x)$.

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in]a,b]) = \mathbb{P}(x \leqslant b) - \mathbb{P}(x \leqslant a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{a}^{b} e^{-t^2/2} \, dt$.



Espérance et variance

Si $X(\Omega) \subset \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$,

X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ CVA.

Espérance et variance

Si $X(\Omega) \subset \left\{ x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ CVA.

- Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$;

Espérance et variance

Si $X(\Omega) \subset \left\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,
X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ CVA.

- Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$;
- si X possède un moment d'ordre 2,
  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$;

Espérance et variance

Si $X(\Omega) \subset \left\{x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ CVA.

- Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$;
- si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$;
- si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Espérance et variance

Si $X(\Omega) \subset \left\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$,

X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ CVA.

- Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$;
- si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$;
- si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

L'application $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ est bilinéaire, symétrique, positive, donc :

Cauchy-Schwarz : $\left|\mathbb{E}(XY)\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$.

Espérance et variance

Si $X(\Omega) \subset \left\{ x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$,

X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ CVA.

- Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$;
- si X possède un moment d'ordre 2,
  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$;
- si X et Y possèdent un moment d'ordre 2,
  $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

L'application $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ est bilinéaire, symétrique, positive, donc :
Cauchy-Schwarz : $\left|\mathbb{E}(XY)\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$.

L'application $(X, Y) \mapsto \operatorname{cov}(X, Y)$ est bilinéaire, symétrique, positive, donc :
Cauchy-Schwarz : $\left|\operatorname{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)V(Y)}$.

$\rightarrow \rho(X, Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$.

Propriétés de l'espérance et de la variance

- $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$
- $X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Propriétés de l'espérance et de la variance

- $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$
- $X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert : $\mathbb{E}\Big(f(X)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n).$

Propriétés de l'espérance et de la variance

- $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$
- $X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert : $\mathbb{E}\Big(f(X)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$.

Formule alternative lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

Propriétés de l'espérance et de la variance

- $\mathbb{E}(\lambda X+Y)=\lambda\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$
- $X\geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X)\geqslant 0$
- $X\leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X)\leqslant \mathbb{E}(Y)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert : $\mathbb{E}\Big(f(X)\Big)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X=x_n)$.

Formule alternative lorsque $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X\geqslant n)$.

- $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$
- $\mathbb{V}(X,Y)=\mathbb{V}(X)+2\operatorname{cov}(X,Y)+\mathbb{V}(Y)$
- $\mathbb{V}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)+2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$
- Si $X_1,\dots,X_n$ sont 2 a 2 indép., $\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n)$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2.
Montrer que la matrice $A = \Big(\mathrm{cov}(X_i,X_j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonalisable et a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2.
Montrer que la matrice $A=\left(\mathrm{cov}(X_i,X_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonalisable et a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

$\mathrm{cov}(X_i,X_j)=\mathrm{cov}(X_j,X_i)$ donc $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2.
Montrer que la matrice $A = \left(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i)$ donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.
Il s'agit de montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, soit : pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, $V^T A V \geqslant 0$.
En effet, si $AV = \lambda V$ alors $V^T A V = \lambda V^T V = \lambda \|V\|^2 \geqslant 0$.

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2.
Montrer que la matrice $A = \left(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i)$ donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.
Il s'agit de montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, soit : pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, $V^T A V \geqslant 0$.
En effet, si $AV = \lambda V$ alors $V^T A V = \lambda V^T V = \lambda \|V\|^2 \geqslant 0$.

$$V^T A V = \sum_{i=1}^n v_i [AV]_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \operatorname{cov}(X_i, X_j) v_i v_j$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2.
Montrer que la matrice $A = \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est diagonalisable et a ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathrm{cov}(X_j, X_i)$ donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.
Il s'agit de montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, soit : pour tout $V \in \mathbb{R}^n$, $V^T AV \geqslant 0$.
En effet, si $AV = \lambda V$ alors $V^T AV = \lambda V^T V = \lambda \|V\|^2 \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} V^T AV &= \sum_{i=1}^n v_i [AV]_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{cov}(X_i, X_j) v_i v_j \\ &= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^n v_i X_i, \sum_{j=1}^n v_j X_j\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n v_i X_i\right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Série génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)t^n$.

Série génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)t^n$.

- X admet un moment d'ordre 1 ssi G_X est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

Série génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)t^n$.

- X admet un moment d'ordre 1 ssi G_X est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.
- X admet un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

Série génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)t^n$.

- X admet un moment d'ordre 1 ssi G_X est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.
- X admet un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

$$(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-r^n)\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^n.$$

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

$$(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-r^n)\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^n.$$

$r < 1 \Rightarrow r^k < r^n$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^k$

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

$$(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-r^n)\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^n.$$

$r < 1 \Rightarrow r^k < r^n$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^k$

soit $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)r^k$.

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

$$(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-r^n)\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^n.$$

$r < 1 \Rightarrow r^k < r^n$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^k$

soit $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)r^k$.

et $r < 1$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) = 1 - G_X(r)$.

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

$$(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-r^n)\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^n.$$

$r < 1 \Rightarrow r^k < r^n$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^k$

soit $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)r^k$.

et $r < 1$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) = 1 - G_X(r)$.

Cas d'égalité :

Série génératrice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
Étudier les cas d'égalité.

$$(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-r^n)\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^n.$$

$r < 1 \Rightarrow r^k < r^n$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)r^k$

soit $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)r^k$.

et $r < 1$ donc $(1-r^n)\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) - G_X(r) = 1 - G_X(r)$.

Cas d'égalité : $\mathbb{P}(X=k) = 0$ pour $k \geqslant n$.

Inégalités de concentration

Elles fournissent des bornes sur la probabilité qu'une variable aléatoire dévie d'une certaine valeur.

Inégalités de concentration

Elles fournissent des bornes sur la probabilité qu'une variable aléatoire dévie d'une certaine valeur.

- **Markov** Si $X \geqslant 0$ possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Inégalités de concentration

Elles fournissent des bornes sur la probabilité qu'une variable aléatoire dévie d'une certaine valeur.

- **Markov** Si $X \geqslant 0$ possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$
- **Bienaymé-Tchebychev** Si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$

Inégalités de concentration

Elles fournissent des bornes sur la probabilité qu'une variable aléatoire dévie d'une certaine valeur.

- **Markov** Si $X \geqslant 0$ possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$
- **Bienaymé-Tchebychev** Si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$
- **Loi faible des grands nombres** Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \quad \text{avec} \quad m = E(X) \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma(X)$$

Inégalité de Cantelli

Si $\alpha > 0$ et si X possède un moment d'ordre 2,
$$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \alpha^2}.$$

Inégalité de Cantelli

Si $\alpha > 0$ et si X possède un moment d'ordre 2,
$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \alpha^2}$.

Soit Y un v.a.d telle que $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$, et $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{si } Y \leqslant 0 \end{cases}$.

On applique C.S. : $\mathbb{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)$.

Inégalité de Cantelli

Si $\alpha > 0$ et si X possède un moment d'ordre 2,
$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \alpha^2}$.

Soit Y un v.a.d telle que $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$, et $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{si } Y \leqslant 0 \end{cases}$.

On applique C.S. : $\mathbb{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)$.
On a $Y \leqslant YZ$ donc $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(YZ)$ et $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0 \implies \mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(YZ)^2$.

Inégalité de Cantelli

Si $\alpha > 0$ et si X possède un moment d'ordre 2,
$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$.

Soit Y un v.a.d telle que $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$, et $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{si } Y \leqslant 0 \end{cases}$.

On applique C.S. : $\mathbb{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)$.
On a $Y \leqslant YZ$ donc $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(YZ)$ et $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0 \implies \mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(YZ)^2$.
$Z^2 = Z$ et $\mathbb{E}(Z) = 1 \times \mathbb{P}(Y > 0) + 0 \times \mathbb{P}(Y \leqslant 0) = \mathbb{P}(Y > 0)$ donc

$$\mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y > 0)$$

Inégalité de Cantelli

Si $\alpha > 0$ et si X possède un moment d'ordre 2,
$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \alpha^2}$.

Soit Y un v.a.d telle que $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$, et $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{si } Y \leqslant 0 \end{cases}$.

On applique C.S. : $\mathbb{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)$.
On a $Y \leqslant YZ$ donc $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(YZ)$ et $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0 \implies \mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(YZ)^2$.
$Z^2 = Z$ et $\mathbb{E}(Z) = 1 \times \mathbb{P}(Y > 0) + 0 \times \mathbb{P}(Y \leqslant 0) = \mathbb{P}(Y > 0)$ donc

$$\mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y > 0)$$

On pose $Y = \alpha - X + \mathbb{E}(X)$. Alors $E(Y) = \alpha > 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) = \alpha^2 + \mathbb{V}(X)$.
En effet, $Y^2 = \Big(\alpha + E(X)\Big)^2 - 2\Big(\alpha + \mathbb{E}(X)\Big)X + X^2$ donc

$$\mathbb{E}(Y^2) = \Big(\alpha + \mathbb{E}(X)\Big)^2 - 2\Big(\alpha + \mathbb{E}(X)\Big)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2) = \alpha^2 - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X^2)$$

Inégalité de Cantelli

Si $\alpha > 0$ et si X possède un moment d'ordre 2,
$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \alpha^2}$.

Soit Y un v.a.d telle que $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0$, et $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > 0 \\ 0 & \text{si } Y \leqslant 0 \end{cases}$.

On applique C.S. : $\mathbb{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)$.
On a $Y \leqslant YZ$ donc $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(YZ)$ et $\mathbb{E}(Y) \geqslant 0 \implies \mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(YZ)^2$.
$Z^2 = Z$ et $\mathbb{E}(Z) = 1 \times \mathbb{P}(Y > 0) + 0 \times \mathbb{P}(Y \leqslant 0) = \mathbb{P}(Y > 0)$ donc

$$\mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{P}(Y > 0)$$

On pose $Y = \alpha - X + \mathbb{E}(X)$. Alors $E(Y) = \alpha > 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) = \alpha^2 + \mathbb{V}(X)$.

On en déduit que $\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) < \alpha\Big) = \mathbb{P}(Y > 0) \geqslant \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + \mathbb{V}(X)}$ donc :

$$\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \mathbb{V}(X)} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2 + \mathbb{V}(X)}$$

Inégalité de Cantelli

Comparaison avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On a prouvé que $\mathbb{P}\Big(X-\mathbb{E}(X)\geqslant\alpha\Big)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$.

Appliqué à $-X$ on obtient : $\mathbb{P}\Big(X-\mathbb{E}(X)\leqslant-\alpha\Big)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$ donc

$$\mathbb{P}\Big(\big|X-\mathbb{E}(X)\big|\geqslant\alpha\Big)\leqslant\frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$$

Inégalité de Cantelli

Comparaison avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On a prouvé que $\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$.

Appliqué à $-X$ on obtient : $\mathbb{P}\Big(X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$ donc

$$\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2}$$

B.T. : $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$.

L'inégalité de Cantelli est meilleure lorsque

$$\frac{2\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)+\alpha^2} \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2} \iff \alpha^2 \leqslant \mathbb{V}(X) \iff \alpha \leqslant \sigma(X)$$