

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une tribu, $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ une probabilité.

Tribu

\mathcal{A} est une tribu lorsque

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A} \\ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Conséquences : $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Probabilité

\mathbb{P} est une probabilité lorsque

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \text{si } i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n). \end{cases}$$

Conséquences : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Théorèmes de limite monotone

- Si $A_n \subset A_{n+1}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.
- Si $A_{n+1} \subset A_n$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Conséquences : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(B_n)$ avec $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(C_n)$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$.

Univers dénombrable

Si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable on peut choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définir \mathbb{P} en posant $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ avec $p_n \geq 0$ et $\sum_n p_n = 1$.

Conditionnement

La *probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.

$(B_i)_{i \in I}$ est un *système complet d'événements* lorsque $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$.

Formule des probabilités totales : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$.

Formule de Bayes : si $(B_i)_{i \in I}$ est un s.c.e., $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}$.

Indépendance

A et B sont *indépendants* lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. **Conséquence :** $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

Les (A_n) sont *indépendants* lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, $\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_k}) = \mathbb{P}(A_{n_1}) \dots \mathbb{P}(A_{n_k})$.

Variables aléatoires

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une *variable aléatoire réelle* lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. X est *discrète* lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Loi de X : si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, et $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geq 0$, il existe une probabilité \mathbb{P} telle que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

Couple de variables aléatoires

La loi *conjointe* de X et de Y est la loi de (X, Y) ; les lois *marginales* de (X, Y) sont les lois de X et de Y. On a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)$$

X et Y sont *indépendantes* lorsque $\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *mutuellement indépendantes* lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n_1 < \dots < n_k$,

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_{n_k} = x_k) = \mathbb{P}(X_{n_1} = x_1) \dots \mathbb{P}(X_{n_k} = x_k).$$

Lemme des coalitions : si X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, les variables $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Espérance, variance

Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, X possède un moment d'ordre k lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument.

Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Propriétés de l'espérance

- $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$
- $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$.

Formule alternative lorsque X est à valeurs dans \mathbb{N} : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Propriétés de la variance

- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$;
- $\mathbb{V}(X, Y) = \mathbb{V}(X) + 2 \text{cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$;
- $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j)$;
- Si X_1, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes, $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$;
- le coefficient de corrélation $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ vérifie $|\rho(X, Y)| \leq 1$ (Cauchy-Schwarz).

Série génératrice

Si X est à valeurs dans \mathbb{N} , $G_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n)t^n$. Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.

X admet un moment d'ordre 1 ssi G_X est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

X admet un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Inégalités de concentration

Markov Si $X \geq 0$ possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Bienaymé-Tchebychev Si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$

Loi faible des grands nombres Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \quad \text{avec } m = \mathbb{E}(X) \quad \text{et } \sigma = \sigma(X)$$

Formulaire

$X \leftrightarrow$	$X(\Omega)$	Loi de X	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$	$G_X(t)$
$\mathcal{U}(n)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{1}{n}(t + \dots + t^n)$
$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = q$	p	pq	$pt + q$
$\mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$\mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pt}{1-qt}$
$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(pt + q)^n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$