

INTERROGATION SUR LES PROBABILITÉS

Durée : libre

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) (1 pt) Montrer que $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Rappel. Il s'agit donc de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $[N = m]$ est un événement.

b) (1,5 pts) On suppose que les (X_n) sont mutuellement indépendantes et que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n+1}$. Montrer que $\mathbb{P}(N = +\infty) = 0$.

Exercice 2

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète, et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(a) = \mathbb{P}(X > a)$.

a) (0,5 pt) Préciser la monotonie de F . On en déduit que F possède en toute point de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une limite à droite et à gauche.

b) (1,5 pt) Déterminer $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$ et $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a)$.

c) (2 pts) Montrer que F est continue à droite en tout $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $F(a^-) - F(a^+)$?

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et N une variable aléatoire indépendante de la suite (X_n) et suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

On pose $Y = \sum_{k=1}^N X_k$ et $Z = \sum_{k=1}^N (1 - X_k)$.

a) (1 pt) Déterminer $\mathbb{P}(Y = k \mid N = n)$ et $\mathbb{P}(Z = k \mid N = n)$.

b) (1 pt) Montrer que Y et Z suivent des lois de Poisson.

c) (1,5 pts) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 4

(1,5 pts) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes et de même loi.

On pose $a_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ et $R_n = \sum_{k \geq n+1} a_k$.

En évaluant de deux façons $\mathbb{P}(X > Y)$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \right)$.

Exercice 5

(1 pt) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et N une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$.

Calculer l'espérance de $Y = X_1 X_2 \cdots X_N$.

Exercice 6

a) (0,5 pt) Soit X une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer $\mathbb{E}((X - \lambda)^2)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$ et de $\delta = \mu - \lambda$.

b) (1,5 pts) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes possédant toutes un moment d'ordre 2. On pose $\mu_n = \mathbb{E}(X_n)$ et on suppose que $\lim \mu_n = \lambda$ et $\lim \mathbb{V}(X_n) = 0$.

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \lambda| \geq \epsilon) = 0$.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives et d'espérance finie. Il existe donc une suite (x_n) de nombres positifs telle que $X(\Omega) \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On pose $\mu = \mathbb{E}(X)$ et on considère un réel λ vérifiant $0 \leq \lambda < \mu$.

- (0,5 pt) Montrer que $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{-tX})$ est définie pour tout $t \geq 0$.
- (2 pts) Montrer que ϕ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\phi'(0) = -\mu$.
- (1 pt) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $e^{\lambda\alpha} \phi(\alpha) < 1$. On pose désormais $K = e^{\lambda\alpha} \phi(\alpha)$.
- (2 pts) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. En considérant l'espérance de $Y = \exp(-\alpha S_n)$, montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \lambda\right) \leq K^n$.