Corrigé : interrogation sur les probabilités

Exercice 1

a) Si $m \in \mathbb{N}^*$, $[\mathrm{N}=m] = [\mathrm{X}_m = 1] \cap \bigcap_{k=0}^{m-1} [\mathrm{X}_k = 0]$ donc $[\mathrm{N}=m]$ est un événement.

$[\mathrm{N}=+\infty] = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} [\mathrm{X}_k = 0]$ donc $[\mathrm{N}=+\infty]$ est un événement. N est bien une variable aléatoire.

b) Posons $\mathrm{A}_n = \bigcap_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k = 0]$. La suite (A_n) est décroissante et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n = [\mathrm{N}=+\infty]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(\mathrm{N}=+\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$. Par indépendance, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \dfrac{1}{k+1}\Big) = \dfrac{1}{n+1}$ (télescopage) donc $\mathbb{P}(\mathrm{N}=+\infty) = 0$.

Exercice 2

a) Si $a < b$ on a $[\mathrm{X} > b] \subset [\mathrm{X} > a]$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} > b) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} > a)$; la fonction F est décroissante.

b) On a $[x > n+1] \subset [x > n]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\mathrm{X} > n]\Big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
On a $\lim_{+\infty} \mathrm{F}(n) = 0$ et puisque la limite en $+\infty$ existe, $\lim_{+\infty} \mathrm{F}(a) = 0$.
On a $[\mathrm{X} > -n] \subset [\mathrm{X} > -n-1]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > -n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\mathrm{X} > -n]\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
On a $\lim_{+\infty} \mathrm{F}(-n) = 1$ et puisque la limite en $-\infty$ existe, $\lim_{-\infty} \mathrm{F}(a) = 1$.

c) F possède une limite à droite en a donc $\mathrm{F}(a^+) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}\Big(a + \dfrac{1}{n}\Big)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Big[\mathrm{X} > a + \dfrac{1}{n}\Big] \subset \Big[\mathrm{X} > a + \dfrac{1}{n+1}\Big]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\mathrm{F}(a^+) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[\mathrm{X} > a + \dfrac{1}{n}\Big]\Big) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > a) = \mathrm{F}(a)$ donc F est continue à droite en a.
De même, $\mathrm{F}(a^-) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}\Big(a - \dfrac{1}{n}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[\mathrm{X} > a - \dfrac{1}{n}\Big]\Big) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a)$ donc $\mathrm{F}(a^-) - \mathrm{F}(a^+) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) - \mathbb{P}(\mathrm{X} > a) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = a)$.

Exercice 3

a) $\Big(\mathrm{Y} \,\Big|\, \mathrm{N} = n\Big) \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ donc $\mathbb{P}\Big(\mathrm{Y} = k \,\Big|\, \mathrm{N} = n\Big) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ si $k \in [\![0,n]\!]$, et 0 sinon.

$\mathrm{Z} = \mathrm{N} - \mathrm{Y}$ donc $\mathbb{P}\Big(\mathrm{Z} = k \,\Big|\, \mathrm{N} = n\Big) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n-k \,\Big|\, \mathrm{N} = n\Big) = \dbinom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$ si $k \in [\![0,n]\!]$, et 0 sinon.

b) $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k \mid \mathrm{N} = n)\mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \dfrac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \dfrac{p^k \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = \dfrac{p^k \lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p}$ donc Y suit une loi de Poisson de paramètre λp. De manière analogue, Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

c) $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k \text{ et } \mathrm{Z} = k') = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k \text{ et } \mathrm{N} = k+k') = \mathbb{P}\Big(\mathrm{Y} = k \mid \mathrm{N} = k+k'\Big)\mathbb{P}(\mathrm{N} = k+k')$

$$= \binom{k+k'}{k} p^k (1-p)^{k'} \frac{\lambda^{k+k'}}{(k+k')!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{p^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(1-p)^{k'}}{k'!} \mathrm{e}^{-(1-p)\lambda} = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k')$$

donc Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4

D'une part, $\mathbb{P}(\mathrm{X} > \mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\mathrm{X} > n \text{ et } \mathrm{Y} = n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} > n)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)\Big)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}_n$.

En inversant les rôles de X et Y on obtient de même $\mathbb{P}(\mathrm{X} < \mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}_n$ et en sommant :

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}_n = \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\mathrm{X} = n \text{ et } \mathrm{Y} = n\Big) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n)\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$$

Exercice 5

$Y(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}\Big(Y = 1 \;\Big|\; N = n\Big) = p^n$ donc $\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(Y = 1 \;\Big|\; N = n\Big)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = \frac{p}{2-p}$.

Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{p}{2-p}$ donc $\mathbb{E}(Y) = \frac{p}{2-p}$.

Exercice 6

a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\Big((X-\lambda)^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - 2\lambda\mathbb{E}(X) + \lambda^2 = \mathbb{V}(X) + \mu^2 - 2\lambda\mu + \lambda^2 = \mathbb{V}(X) + (\mu-\lambda)^2$.

b) $\mathbb{P}\Big(|X_n - \lambda| \geqslant \epsilon\Big) = \mathbb{P}\Big((X_n-\lambda)^2 \geqslant \epsilon^2\Big)$ donc d'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}\Big(|X_n - \lambda| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\Big((X_n-\lambda)^2\Big)}{\epsilon}$.

D'après la question précédente, $\mathbb{P}\Big(|X_n - \lambda| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\epsilon} + \frac{(\mu_n - \lambda)^2}{\epsilon}$.

Or $\lim \mathbb{V}(X_n) = 0$ et $\lim \mu_n = \lambda$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X_n - \lambda| \geqslant \epsilon\Big) = 0$.

Exercice 7

a) X est fini ou dénombrable donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs telle que $X(\Omega) \subset \Big\{x_n \;\Big|\; n \in \mathbb{N}\Big\}$.

Pour tout $t \geqslant 0$ on a $e^{-tx_n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n) \leqslant \mathbb{P}(X = x_n)$. Puisque la série $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (sa somme est égale à 1) il en est de même de $\sum e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n)$, ce qui assure que $\mathbb{E}(e^{-tX})$ existe.

b) Posons $f_n(t) = e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n)$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(t) = -x_n e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n)$ donc sur $[0,+\infty[$, $\|f_n'\|_\infty = x_n\mathbb{P}(X = x_n)$. Puisque X possède une espérance la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$ donc ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, et $\phi'(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n)$. En particulier, $\phi'(0) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n) = -\mu$.

c) D'après la formule de Taylor-Young, $\phi(t) \underset{0}{=} 1 - \mu x + o(x)$ donc $e^{\lambda t}\,\phi(t) \underset{0}{=} \Big(1 + \lambda t + o(t)\Big)\Big(1 - \mu t + o(t)\Big) \underset{0}{=} 1 + (\lambda - \mu)t + o(t)$.

Puisque $\lambda - \mu < 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que sur $]0,\epsilon[$, $e^{\lambda t}\,\phi(t) < 1$.

d) On a $\frac{S_n}{n} \leqslant \lambda \iff Y \geqslant e^{-\lambda n\alpha}$ donc d'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \leqslant \lambda\Big) = \mathbb{P}\Big(Y \geqslant e^{-\lambda n\alpha}\Big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{e^{-\lambda n\alpha}}$.

Les X_k sont indépendants donc il en est de même des $e^{-\alpha X_k}$ et ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(e^{-\alpha X_k}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{-\alpha X}\Big)^n = \phi(\alpha)^n = K^n e^{-\lambda n\alpha}$ et donc $\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \leqslant \lambda\Big) \leqslant K^n$.