Intégration

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer la limite de $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

Sommes de Riemann

Si $f:[0,1]\to\mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer la limite de $\displaystyle u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

$\displaystyle u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k-1}{n})(1+\frac{k}{n})}}$; ce n'est pas une somme de Riemann.

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer la limite de $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

$\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k-1}{n})(1+\frac{k}{n})}}$; ce n'est pas une somme de Riemann.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k}{n})^2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k-1}{n})^2}}$$

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer la limite de $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

$\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k-1}{n})(1+\frac{k}{n})}}$; ce n'est pas une somme de Riemann.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k}{n})^2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{k-1}{n})^2}}$$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \quad \text{donc } \lim u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ?

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

On suppose f positive et croissante.

Première preuve. $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$ donc :

$$\frac{f(0)}{n} + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

et par passage à la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

On suppose f positive et croissante.

Seconde preuve :

$$\frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)\mathrm{d}t \text{ donc } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \underbrace{f\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)}_{f_n(t)}\mathrm{d}t$$

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

On suppose f positive et croissante.

Seconde preuve :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\right)\mathrm{d}t \text{ donc } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \underbrace{f\left(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\right)}_{f_n(t)}\mathrm{d}t$$

- f_n est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$;

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

On suppose f positive et croissante.

Seconde preuve :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)\mathrm{d}t \text{ donc } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \underbrace{f\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)}_{f_n(t)}\mathrm{d}t$$

- f_n est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$;
- $t - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \leqslant t$ et f est $\mathscr{C}^0$ donc (f_n) CVS vers f ;

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

On suppose f positive et croissante.

Seconde preuve :

$$\frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)\mathrm{d}t \text{ donc } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \underbrace{f\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)}_{f_n(t)}\mathrm{d}t$$

- f_n est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$;
- $t - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor nt\rfloor}{n} \leqslant t$ et f est $\mathscr{C}^0$ donc (f_n) CVS vers f ;
- $\dfrac{\lfloor nt\rfloor}{n} \leqslant t$ et f est croissante donc $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f(t)$.

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Et pour $f : [0,1[\to \mathbb{K}$ est continue et intégrable ? + monotone

On suppose f positive et croissante.

Seconde preuve :

$$\frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)\mathrm{d}t \text{ donc } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \underbrace{f\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big)}_{f_n(t)}\mathrm{d}t$$

- f_n est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$;
- $t - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor nt\rfloor}{n} \leqslant t$ et f est $\mathscr{C}^0$ donc (f_n) CVS vers f ;
- $\dfrac{\lfloor nt\rfloor}{n} \leqslant t$ et f est croissante donc $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f(t)$.

Théorème de CV dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est $\mathscr{C}^0$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est $\mathscr{C}^0$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

Applications :

- calcul d'une intégrale par la recherche d'une primitive ;
- intégration par parties, changement de variable ;
- expression des solutions d'une équation différentielle.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est $\mathscr{C}^0$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

Applications :

- calcul d'une intégrale par la recherche d'une primitive ;
- intégration par parties, changement de variable ;
- expression des solutions d'une équation différentielle.

Attention :

- si $G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $G'(x) = -f(x)$;
- si $H(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $H'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est $\mathscr{C}^0$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $k > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant k \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f = 0$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est $\mathscr{C}^0$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $k > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant k \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f = 0$.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant F'(x) \leqslant kF(x)$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est $\mathscr{C}^0$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $k > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant k \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f = 0$.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant F'(x) \leqslant kF(x)$.
On s'inspire de la résolution des équations différentielles :

$$\Big(F'(x) - kF(x)\Big)\mathrm{e}^{-kx} \leqslant 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(x)\mathrm{e}^{-kx}\Big) \leqslant 0 \implies F(x)\mathrm{e}^{-kx} \leqslant F(0) = 0.$$

Mais $f \geqslant 0 \implies F \geqslant 0$ donc en définitive $F = 0$, et $f = F' = 0$.

Formules de Taylor

Aspect global

- Avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,x]}$$

Formules de Taylor

Aspect global

- Avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,x]}$$

Ex. $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow \|f^{(n)}\|_{\infty,[0,1]} \leqslant (n-1)!$

$\left| \ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Formules de Taylor

Aspect local

- Formule de Taylor-Young : $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}(h^{n+1})$.

Formules de Taylor

Aspect local

- Formule de Taylor-Young : $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}(h^{n+1})$.

Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Calculer $\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$.

Formules de Taylor

Aspect local

- Formule de Taylor-Young : $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}(h^{n+1})$.

Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Calculer $\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$.

$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \mathrm{o}(h^2)$

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \mathrm{o}(h^2)$

Donc : $f(a-h) - 2f(a) + f(a+h) = h^2 f''(a) + \mathrm{o}(h^2)$, soit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2} = f''(a)$$

Intégration sur un intervalle

On a f intégrable sur I $\iff \displaystyle\int_I |f|$ converge $\implies \displaystyle\int_I f$ converge.

Réciproque est fausse : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ CV mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ DV.

Intégration sur un intervalle

On a f intégrable sur I $\iff \displaystyle\int_I |f|$ converge $\implies \displaystyle\int_I f$ converge.

Réciproque est fausse : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ CV mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ DV.

Schémas de CV et de DV : si $I = [a, b[$ et $f(x) \underset{b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ on a

$$\int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Intégration sur un intervalle

Exercice

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Intégration sur un intervalle

Exercice

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite en $+\infty$ donc est bornée sur $[1, +\infty[$, et :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Intégration sur un intervalle

Exercice

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite en $+\infty$ donc est bornée sur $[1, +\infty[$, et :

$$\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^{x} + \int_1^{x} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$\displaystyle\frac{F(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ CV.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f^2 et g^2 sont intégrables il en est de même de fg, et

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f^2 et g^2 sont intégrables il en est de même de fg, et

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}$$

Conséquences :

- L'espace $L^2(I, \mathbb{K})$ des fonction $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ de carré intégrable sur I est un $\mathbb{K}$-ev ;
- L'espace $L^2_c(I, \mathbb{R})$ des fonction $\mathscr{C}^0$ de carré intégrable sur I est un espace préhilbertien.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient de carré intégrable. Montrer que f' est de carré intégrable.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient de carré intégrable. Montrer que f' est de carré intégrable.

$$\int_0^x f'(t)^2 \, dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t) \, dt.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient de carré intégrable. Montrer que f' est de carré intégrable.

$$\int_0^x f'(t)^2 \, \mathrm{d}t = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t) \, \mathrm{d}t.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ff'' est intégrable, donc f' est de carré intégrable ssi $\lim\limits_{+\infty} f(x)f'(x)$ existe.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient de carré intégrable. Montrer que f' est de carré intégrable.

$$\int_0^x f'(t)^2 \,\mathrm{d}t = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ff'' est intégrable, donc f' est de carré intégrable ssi $\lim\limits_{+\infty} f(x)f'(x)$ existe.

Par l'absurde : si f' n'est pas de carré intégrable, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient de carré intégrable. Montrer que f' est de carré intégrable.

$$\int_0^x f'(t)^2 \, \mathrm{d}t = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t) \, \mathrm{d}t.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ff'' est intégrable, donc f' est de carré intégrable ssi $\lim\limits_{+\infty} f(x)f'(x)$ existe.

Par l'absurde : si f' n'est pas de carré intégrable, $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f'(t)^2 \, \mathrm{d}t = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.

Mais $2f(x)f'(x)$ est la dérivée de $f(x)^2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^2 = +\infty$ et f^2 n'est pas intégrable.

Intégrales à paramètre

Principe du recouvrement. Pour montrer que f est continue sur un intervalle J, il suffit de montrer que f est continue sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans J.

Intégrales à paramètre

Principe du recouvrement. Pour montrer que f est continue sur un intervalle J, il suffit de montrer que f est continue sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans J.

Variantes :

- si $J =]a,b]$ on peut recouvrir par $[\alpha,b]$ avec $\alpha > a$;
- si $J = [a,b[$ on peut recouvrir par $[a,\beta]$ avec $\beta < b$;
- si $J =]a,b[$ on peut recouvrir par $[\alpha,b[$ avec $\alpha > a$ ou $]a,\beta]$ avec $\beta < b$;

Intégrales à paramètre

Principe du recouvrement. Pour montrer que f est continue sur un intervalle J, il suffit de montrer que f est continue sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans J.

Variantes :

- si $J =]a, b]$ on peut recouvrir par $[\alpha, b]$ avec $\alpha > a$;
- si $J = [a, b[$ on peut recouvrir par $[a, \beta]$ avec $\beta < b$;
- si $J =]a, b[$ on peut recouvrir par $[\alpha, b[$ avec $\alpha > a$ ou $]a, \beta]$ avec $\beta < b$;

Contexte. Soit $f : J \times I \to \mathbb{K}$ telle que

- $\forall x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I.

On définit $g : J \to \mathbb{K}$ en posant $g(x) = \displaystyle\int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t$.

Intégrale à paramètre

Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

Continuité. On suppose que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;
- il existe $\phi : I \to \mathbb{R}_+$ $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I tq $\forall x \in J, |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$.

Alors g est continue sur J.

Intégrale à paramètre

Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

Continuité. On suppose que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;
- il existe $\phi : I \to \mathbb{R}_+$ $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I tq $\forall x \in J, |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$.

Alors g est continue sur J.

Dérivabilité. On suppose que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J ;
- pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ sur I ;
- il existe $\psi : I \to \mathbb{R}_+$ $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I tq $\forall x \in J, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$.

Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, et $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Intégrale à paramètre

Extension du théorème de dérivabilité

On suppose que :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J ;
- $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\forall x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I ;
- pour tout $x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ sur I ;
- il existe $\psi : I \to \mathbb{R}_+$ $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I tq $\forall x \in J$, $\left|\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$.

Alors g est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J, et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Intégrale à paramètre

Montrer que $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^3}\,dt$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0, +\infty[$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

$f(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^3}$, $I = [0, +\infty[$, $J = [0, +\infty[$ puis $J =]0, +\infty[$.

Intégrale à paramètre

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

$f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^3}$, $I = [0,+\infty[$, $J = [0,+\infty[$ puis $J =]0,+\infty[$.

Continuité : $\left|f(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} = \phi(t)$.

Intégrale à paramètre

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^3}\,dt$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

$f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^3}$, $I = [0,+\infty[$, $J = [0,+\infty[$ puis $J =]0,+\infty[$.

Continuité : $\left|f(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} = \phi(t)$.

Dérivabilité : il faut montrer que g est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc dominer toutes les dérivées partielles.

Intégrale à paramètre

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^3}\,dt$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

$f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^3}$, $I = [0,+\infty[$, $J = [0,+\infty[$ puis $J =]0,+\infty[$.

Continuité : $\left|f(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} = \phi(t)$.

Dérivabilité : il faut montrer que g est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc dominer toutes les dérivées partielles.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \dfrac{(-t^2)^n\, e^{-xt^2}}{1+t^3}$.

Intégrale à paramètre

Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^3}\,dt$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

$f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^3}$, $I = [0,+\infty[$, $J = [0,+\infty[$ puis $J =]0,+\infty[$.

Continuité : $\left|f(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} = \phi(t)$.

Dérivabilité : il faut montrer que g est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc dominer toutes les dérivées partielles.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \dfrac{(-t^2)^n\, e^{-xt^2}}{1+t^3}$. Soit $\alpha > 0$. Sur $[\alpha,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^{2n}\, e^{-\alpha t^2}}{1+t^3} = \psi_n(t)$$

ψ_n est intégrable sur I car $\psi_n(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\alpha,+\infty[$ puis par recouvrement sur $]0,+\infty[$.