Intégration

Intégration sur un segment

Sommes de Riemann

Si $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ est continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est continue et $a \in \mathrm{I}$, l'application $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et $\mathrm{F}' = f$.

Formules de Taylor

Aspect global : Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ alors pour tout $a \in \mathrm{I}$, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,x]}$$

Aspect local : formule de Taylor-Young

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, alors pour tout $a \in \mathrm{I}$, $f(a+h) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}(h^{n+1})$.

Intégration sur un intervalle

On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est *intégrable* sur I lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_\mathrm{I} |f|$ converge. On a :

$$f \text{ intégrable} \iff \int_\mathrm{I} |f| \text{ converge} \implies \int_\mathrm{I} f \text{ converge} \quad \text{(la réciproque est fausse)}$$

Schémas de convergence et de divergence

Lorsque $\mathrm{I} = [a,b[$ et $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ telles que $f(x) \underset{b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ on a :

$$\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Inégalités de Cauchy-Schwarz

Si f^2 et g^2 sont intégrables il en est de même de fg, et $\displaystyle\int_\mathrm{I} |fg| \leqslant \left(\int_\mathrm{I} |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_\mathrm{I} |g|^2\right)^{1/2}$.

Intégrales à paramètre

Soit $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur I. On définit $g : \mathrm{J} \to \mathbb{K}$ en posant $g(x) = \displaystyle\int_\mathrm{I} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Continuité sous le signe intégral

(i) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;
(ii) il existe $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur I telle que $\forall x \in \mathrm{J}$, $|f(x,t)| \leqslant \phi(t)$.

Alors g est continue sur J.

Dérivabilité sous le signe intégral

(i) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\forall x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur I ;
(ii) pour tout $x \in \mathrm{J}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ sur I ;
(iii) il existe $\psi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur I telle que $\forall x \in \mathrm{J}$, $\left|\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$.

Alors g est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J, et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_\mathrm{I} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.