Interrogation sur l'intégration

Durée : libre

Exercice 1

a) (1 pt) Discuter en fonction de α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(\ln t)}$. Justifier votre réponse.

b) (1 pt) Discuter en fonction de α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{(\ln t)^{\alpha}}{(t-1)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$. Justifier votre réponse.

c) (1 pt) Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1}$.

Exercice 2

a) (1 pt) On note $\phi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \dfrac{1}{t}$. Justifier que ϕ est prolongeable par continuité en 0 et dérivable pour ce prolongement.

b) (2 pts) Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe un réel K (qu'on ne calculera pas) tel que $f(x) \underset{0}{=} -\ln x + \mathrm{K} + x - \dfrac{1}{4}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) (1 pt) Montrer (à l'aide d'une majoration simple) que $g(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\big(f(x)\big)$.

b) (1 pt) Démontrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

c) (2 pts) Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs positives telle que $f'(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\big(f(x)\big)$.

a) (1,5 pts) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{\epsilon x})$.

b) (1,5 pts) Montrer que $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe pour tout $x > 0$, et que $\mathrm{F}(x) \underset{+\infty}{\sim} f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 5

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) (1 pt) Montrer que f' est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) (1,5 pts) En déduire l'existence de $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

c) (1,5 pts) Montrer que la fonction g est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque l'expression a un sens on pose $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

a) (1 pt) On suppose f intégrable et g bornée. Montrer que $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) (2 pts) On suppose f à support compact : il existe un segment $[a,b]$ en dehors duquel $f(x) = 0$. Montrer que $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.