Corrigé : interrogation sur l'intégration

Exercice 1

a) Lorsque $\alpha > 1$, $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{t^\beta}\Big)$ avec $1 < \beta < \alpha$ donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)}$ converge.

Lorsque $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{t^\beta} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)}\Big)$ avec $\alpha < \beta < 1$ donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)}$ diverge.

Lorsque $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)} = \ln(\ln(x))$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)} = +\infty$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)}$ diverge.

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$ a même nature (en posant $u = t-1$) que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)^\alpha}{u^{5/2}}\,\mathrm{d}u$. Or $\dfrac{\ln(1+u)^\alpha}{u^{5/2}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u^{5/2-\alpha}}$ donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 3/2$. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 3/2$.

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1}$ converge. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1}$ converge. D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1}$ converge.

Exercice 2

a) $\phi(t) \underset{0}{=} -1 + \dfrac{t}{2} + \mathrm{o}(t)$ donc ϕ est prolongeable par continuité en posant $\phi(0) = -1$, et ce prolongement est dérivable (car ϕ possède un développement limité d'ordre 1 en ce point).

b) $\ln x = -\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $f(x)+\ln x = \displaystyle\int_x^1 \phi(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental de l'analyse la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \phi(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et possède une dérivée d'ordre 2 en 0 donc d'après la formule de Taylor-Young,

$$\Phi(x) \underset{0}{=} \Phi(0) + x\Phi'(0) + \frac{x^2}{2}\Phi''(0) + \mathrm{o}(x^2)$$

avec $\Phi(0) = \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{K}$, $\Phi'(0) = -\phi(0) = 1$ et $\Phi''(0) = -\phi'(0) = -\dfrac{1}{2}$, ce qui donne : $f(x) + \ln x \underset{0}{=} \mathrm{K} + x - \dfrac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)$.

Exercice 3

a) Pour tout $t \geqslant x$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{xt}$ donc en intégrant, $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$, ce qui prouve que $g(x) \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$.

b) Une intégration par parties conduit à $f(x) = \Big[\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}}{t}\Big]_x^{+\infty} - g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - g(x)$ ce qui donne à l'aide de la question précédente : $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \mathrm{o}\big(f(x)\big)$, soit $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

c) D'après la question précédente, $f(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$ donc pour tout $x > 0$, f est intégrable sur $[x,+\infty[$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $f'(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$. Par ailleurs, d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$ donc on peut réaliser une intégration par parties :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -xf(x) + \mathrm{e}^{-x}$$

Il reste à faire tendre x vers 0 : on a $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} + \mathrm{K} = -\ln x + \mathrm{K}$ où $\mathrm{K} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est une constante donc $0 \leqslant xf(x) \leqslant \mathrm{K}x - x\ln x$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$.

f étant positive, on a montré que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 4

a) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang A à partir duquel $f'(x) \leqslant \epsilon f(x)$, ce qu'on peut encore écrire : $\big(f'(x) - \epsilon f(x)\big)\mathrm{e}^{-\epsilon x} \leqslant 0$.
Ceci montre que la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\epsilon x}$ est décroissante sur $[\mathrm{A}, +\infty[$ et donc que pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, $0 \leqslant f(x)\mathrm{e}^{-\epsilon x} \leqslant f(\mathrm{A})\mathrm{e}^{-\epsilon \mathrm{A}}$, ce qui implique que $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{\epsilon x})$.

b) En choisissant $\epsilon < 1$ ceci montre que $f(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-(1-\epsilon)x})$ et donc que $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, ce qui donne un sens à $\mathrm{F}(x)$.
La relation $f(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-(1-\epsilon)x})$ prouve aussi que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t} = 0$, ce qui nous permet de réaliser l'intégration par parties suivante : $\mathrm{F}(x) = \Big[-f(t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_x^{+\infty} + \displaystyle\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = f(x)\mathrm{e}^{-x} + \int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang A à partir duquel $|f'(t)| \leqslant \epsilon f(t)$ donc $\forall x \geqslant \mathrm{A}$, $\Big|\displaystyle\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \epsilon \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \epsilon\mathrm{F}(x)$.
Ceci traduit le fait que $\displaystyle\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\mathrm{F}(x)\big)$, et donc que $\mathrm{F}(x) \underset{+\infty}{=} f(x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{o}\big(\mathrm{F}(x)\big)$, soit encore $\mathrm{F}(x) \underset{+\infty}{\sim} f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 5

a) f' est de signe constant (négatif) car f est décroissante, donc prouver que f' est intégrable revient à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = -f(0) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^{\mathrm{K}} f(t)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{f(t)}{ix}\mathrm{e}^{itx}\Big]_0^{\mathrm{K}} + \frac{i}{x}\int_0^{\mathrm{K}} f'(t)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$.
$|f(\mathrm{K})\mathrm{e}^{i\mathrm{K}x}| = |f(\mathrm{K})|$ donc $\lim\limits_{\mathrm{K}\to+\infty} f(\mathrm{K})\mathrm{e}^{i\mathrm{K}x} = 0$ et $|f'(t)\mathrm{e}^{itx}| = |f'(t)|$ et puisque f' est intégrable, il en est de même de $t \mapsto f'(t)\mathrm{e}^{itx}$. On peut donc faire tendre K vers $+\infty$ dans la relation précédente, ce qui montre que $g(x)$ a bien un sens et que $g(x) = \dfrac{i}{x}\Big(f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t\Big)$.

c) L'expression précédente montre que pour prouver que g est continue, il suffit de montrer que $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$ l'est. On applique pour cela le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f'(t)\mathrm{e}^{itx}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f'(x)\mathrm{e}^{itx}$ est continue ;
- pour tout $x > 0$, $\forall t \geqslant 0$, $|f'(t)\mathrm{e}^{itx}| \leqslant |f'(t)| = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable donc h est bien continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6

a) On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$;
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)| = \phi(t)$.

La fonction ϕ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On a ici $(f*g)(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$. Appliquons de nouveau le théorème de continuité des intégrales à paramètre, mais cette fois-ci sur un segment $[u,v] \subset \mathbb{R}$:

- pour tout $x \in [u,v]$ la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ sur $[a,b]$;
- pour tout $t \in [a,b]$ la fonction $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[u,v]$;
- $\forall x \in [u,v]$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_{\infty,[u,v]} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur $[a,b]$ donc $f*g$ est continue sur tout segment $[u,v]$, puis par recouvrement sur $\mathbb{R}$.