Espaces euclidiens

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Bases orthonormées

Si (e) est une b.o.n, $(x,y)\in E^2$ et $X=\mathrm{Mat}_{(e)}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\mathrm{Mat}_{(e)}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\langle e_k\mid x\rangle$;
- $\langle x\mid y\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=X^TY$.

Bases orthonormées

Si (e) est une b.o.n, $(x,y)\in E^2$ et $X=\mathrm{Mat}_{(e)}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\mathrm{Mat}_{(e)}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

- $\forall k\in[\![1,n]\!], x_k=\langle e_k \mid x\rangle$;
- $\langle x \mid y\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$.

Si $A=\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ alors $a_{ij}=\langle e_i \mid u(e_j)\rangle$.

Bases orthonormées

Si (e) est une b.o.n, $(x,y)\in E^2$ et $X=\mathrm{Mat}_{(e)}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\mathrm{Mat}_{(e)}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\langle e_k\mid x\rangle$;
- $\langle x\mid y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k=X^TY$.

Si $A=\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ alors $a_{ij}=\langle e_i\mid u(e_j)\rangle$.

Matrice et déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1,\dots,v_n)$ des vecteurs de E. La matrice de Gram de $(v_1,\dots,v_n)$ est $G(v_1,\dots,v_n)=\big(\langle v_i\mid v_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Bases orthonormées

Si (e) est une b.o.n, $(x, y) \in E^2$ et $X = \mathrm{Mat}_{(e)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \mathrm{Mat}_{(e)}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \langle e_k \mid x \rangle$;
- $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$.

Si $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ alors $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j) \rangle$.

Matrice et déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \ldots, v_n)$ des vecteurs de E. La matrice de Gram de $(v_1, \ldots, v_n)$ est $G(v_1, \ldots, v_n) = \big(\langle v_i \mid v_j \rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Soit H un sous-espace vectoriel de dimension n qui contient $v_1, \ldots, v_n$, et (e) une b.o.n de H. On pose $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(v_1, \ldots, v_n)$.

Alors $\langle v_i \mid v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid v_i \rangle \langle e_k \mid v_j \rangle = [A^T A]_{ij}$ donc $G(v_1, \ldots, v_n) = A^T A$.

Bases orthonormées

Si (e) est une b.o.n, $(x, y) \in E^2$ et $X = \mathrm{Mat}_{(e)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \mathrm{Mat}_{(e)}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \langle e_k \mid x \rangle$;
- $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$.

Si $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ alors $a_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j) \rangle$.

Matrice et déterminant de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \ldots, v_n)$ des vecteurs de E. La matrice de Gram de $(v_1, \ldots, v_n)$ est $G(v_1, \ldots, v_n) = \big(\langle v_i \mid v_j \rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Soit H un sous-espace vectoriel de dimension n qui contient $v_1, \ldots, v_n$, et (e) une b.o.n de H. On pose $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(v_1, \ldots, v_n)$.

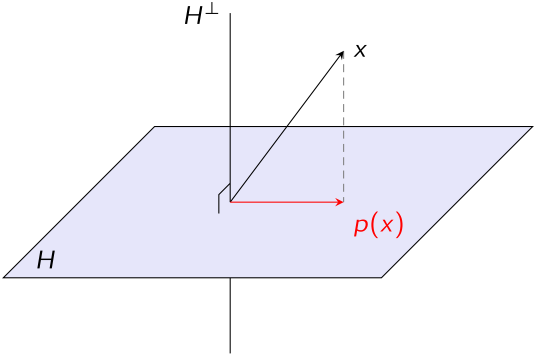
Alors $\langle v_i \mid v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid v_i \rangle \langle e_k \mid v_j \rangle = [A^T A]_{ij}$ donc $G(v_1, \ldots, v_n) = A^T A$.

Donc $\det G(v_1, \ldots, v_n) = (\det A)^2 \geqslant 0$, avec égalité ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ liée.

Projection orthogonale

Si H est un sev de dimension finie de E, $p(x)$ est défini par :

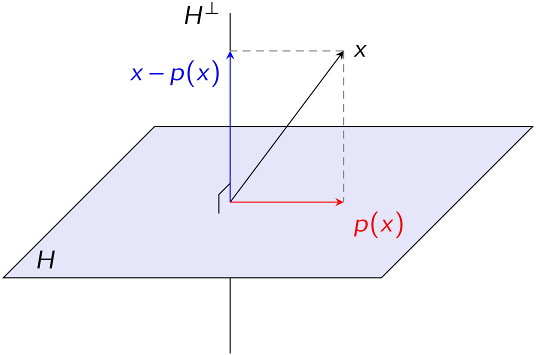
- $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$ où (e) est une base orthonormée de H ;



Projection orthogonale

Si H est un sev de dimension finie de E, $p(x)$ est défini par :

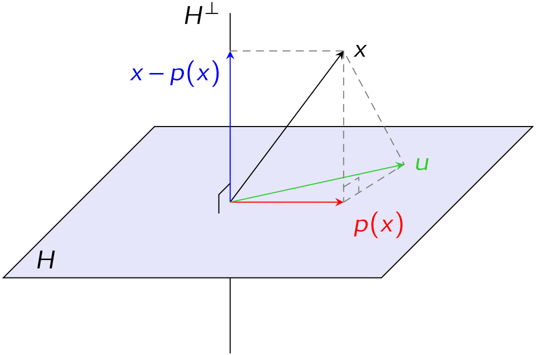
- $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$ où (e) est une base orthonormée de H ;
- c'est l'unique vecteur vérifiant $p(x) \in H$ et $x - p(x) \in H^\perp$;



Projection orthogonale

Si H est un sev de dimension finie de E, $p(x)$ est défini par :

- $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$ où (e) est une base orthonormée de H ;
- c'est l'unique vecteur vérifiant $p(x) \in H$ et $x - p(x) \in H^\perp$;
- c'est l'unique vecteur réalisant le minimum de $\|x-u\|$ où $u \in H$ (la distance de x à H).



Projection orthogonale

Utilisation du déterminant de Gram

Si (b) est une base quelconque de H, $\mathrm{d}(x,H)^2 = \dfrac{\det G(x,b_1,\dots,b_n)}{\det G(b_1,\dots,b_n)}$.

Projection orthogonale

Utilisation du déterminant de Gram

Si (b) est une base quelconque de H, $\mathrm{d}(x,H)^2 = \dfrac{\det G(x,b_1,\dots,b_n)}{\det G(b_1,\dots,b_n)}$.

Linéarité par rapport à la première colonne : $x = (x-p(x)) + p(x)$ donc

$$\begin{aligned}\det G(x,b_1,\dots,b_n) &= \det G(x-p(x),b_1,\dots,b_n) + \det G(p(x),b_1,\dots,b_n)\\ &= \det G(x-p(x),b_1,\dots,b_n) + 0 \text{ (famille liée)}\end{aligned}$$

Projection orthogonale

Utilisation du déterminant de Gram

Si (b) est une base quelconque de H, $\mathrm{d}(x,H)^2 = \dfrac{\det G(x,b_1,\dots,b_n)}{\det G(b_1,\dots,b_n)}$.

Linéarité par rapport à la première colonne : $x = (x-p(x)) + p(x)$ donc

$$\begin{aligned}\det G(x,b_1,\dots,b_n) &= \det G(x-p(x),b_1,\dots,b_n) + \det G(p(x),b_1,\dots,b_n)\\ &= \det G(x-p(x),b_1,\dots,b_n) + 0 \text{ (famille liée)}\end{aligned}$$

On a $\langle x-p(x) \mid b_i\rangle = 0$ donc

$$G(x-p(x),b_1,\dots,b_n) = \left(\begin{array}{c|ccc} \|x-p(x)\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & G(b_1,\dots,b_n) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

donc $\det G(x,b_1,\dots,b_n) = \mathrm{d}(x,H)^2 \det G(b_1,\dots,b_n)$.

Inégalité de Hadamard

Si $v_1, \dots, v_n \in E$, $\det G(v_1, \dots, v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Inégalité de Hadamard

Si $v_1, \ldots, v_n \in E$, $\det G(v_1, \ldots, v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée, $\det G(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

On suppose désormais $(v_1, \ldots, v_n)$ libre.

Inégalité de Hadamard

Si $v_1,\dots,v_n \in E$, $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Si $(v_1,\dots,v_n)$ est liée, $\det G(v_1,\dots,v_n) = 0$.

On suppose désormais $(v_1,\dots,v_n)$ libre.

$\det G(v_1,\dots,v_n) = \mathrm{d}(v_1,H)^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$ où $H = \mathrm{Vect}(v_2,\dots,v_n)$.

On a $\mathrm{d}(v_1,H) \leqslant \|v_1 - 0\|$ donc $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$.
On conclut par récurrence.

Inégalité de Hadamard

Si $v_1,\dots,v_n \in E$, $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Si $(v_1,\dots,v_n)$ est liée, $\det G(v_1,\dots,v_n) = 0$.

On suppose désormais $(v_1,\dots,v_n)$ libre.

$\det G(v_1,\dots,v_n) = \mathrm{d}(v_1,H)^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$ où $H = \mathrm{Vect}(v_2,\dots,v_n)$.

On a $\mathrm{d}(v_1,H) \leqslant \|v_1 - 0\|$ donc $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$.
On conclut par récurrence.

Cas d'égalité ?

Inégalité de Hadamard

Si $v_1, \dots, v_n \in E$, $\det G(v_1, \dots, v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est liée, $\det G(v_1, \dots, v_n) = 0$.

On suppose désormais $(v_1, \dots, v_n)$ libre.

$\det G(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{d}(v_1, H)^2 \det G(v_2, \dots, v_n)$ où $H = \mathrm{Vect}(v_2, \dots, v_n)$.

On a $\mathrm{d}(v_1, H) \leqslant \|v_1 - 0\|$ donc $\det G(v_1, \dots, v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \det G(v_2, \dots, v_n)$.
On conclut par récurrence.

Cas d'égalité ?
$\det G(v_1, \dots, v_n) = \|v_1\|^2 \det G(v_2, \dots, v_n)$ lorsque $\mathrm{d}(v_1, H) = \|v_1\|$
soit :

Inégalité de Hadamard

Si $v_1,\dots,v_n \in E$, $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Si $(v_1,\dots,v_n)$ est liée, $\det G(v_1,\dots,v_n) = 0$.

On suppose désormais $(v_1,\dots,v_n)$ libre.

$\det G(v_1,\dots,v_n) = \mathrm{d}(v_1,H)^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$ où $H = \mathrm{Vect}(v_2,\dots,v_n)$.

On a $\mathrm{d}(v_1,H) \leqslant \|v_1 - 0\|$ donc $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$.
On conclut par récurrence.

Cas d'égalité ?
$\det G(v_1,\dots,v_n) = \|v_1\|^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$ lorsque $\mathrm{d}(v_1,H) = \|v_1\|$
soit : $v_1 \in H^\perp$.

Inégalité de Hadamard

Si $v_1,\dots,v_n \in E$, $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

Si $(v_1,\dots,v_n)$ est liée, $\det G(v_1,\dots,v_n) = 0$.

On suppose désormais $(v_1,\dots,v_n)$ libre.

$\det G(v_1,\dots,v_n) = \mathrm{d}(v_1,H)^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$ où $H = \mathrm{Vect}(v_2,\dots,v_n)$.

On a $\mathrm{d}(v_1,H) \leqslant \|v_1 - 0\|$ donc $\det G(v_1,\dots,v_n) \leqslant \|v_1\|^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$.
On conclut par récurrence.

Cas d'égalité ?
$\det G(v_1,\dots,v_n) = \|v_1\|^2 \det G(v_2,\dots,v_n)$ lorsque $\mathrm{d}(v_1,H) = \|v_1\|$
soit : $v_1 \in H^\perp$.
Conclusion : il y a égalité lorsque la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est orthogonale.

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\displaystyle \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \, e^{-t} \, dt.$

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3-at^2-bt-c)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$E=\mathbb{R}[X]$, $\langle P\mid Q\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, il faut calculer $\mathrm{d}(X^3,\mathbb{R}_2[X])^2$.

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3-at^2-bt-c)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$E=\mathbb{R}[X]$, $\langle P\mid Q\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, il faut calculer $\mathrm{d}(X^3,\mathbb{R}_2[X])^2$.

Méthode classique : on pose $p(X^3)=aX^2+bX+c$ avec :

$$\begin{cases}\langle X^3-aX^2-bX-c\mid 1\rangle=0\\ \langle X^3-aX^2-bX-c\mid X\rangle=0\\ \langle X^3-aX^2-bX-c\mid X^2\rangle=0\end{cases}$$

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$

$E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, il faut calculer $\mathrm{d}(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2$.

Méthode classique : on pose $p(X^3) = aX^2 + bX + c$ avec :

$$\begin{cases} \langle X^3 - aX^2 - bX - c \mid 1 \rangle = 0 \\ \langle X^3 - aX^2 - bX - c \mid X \rangle = 0 \\ \langle X^3 - aX^2 - bX - c \mid X^2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b + c = 6 \\ 6a + 2b + c = 24 \\ 24a + 6b + 2c = 120 \end{cases}$$

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P \mid Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, il faut calculer $\mathrm{d}(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2$.

Méthode classique : on pose $p(X^3) = aX^2 + bX + c$ avec :

$$\begin{cases} \langle X^3 - aX^2 - bX - c \mid 1\rangle = 0 \\ \langle X^3 - aX^2 - bX - c \mid X\rangle = 0 \\ \langle X^3 - aX^2 - bX - c \mid X^2\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b + c = 6 \\ 6a + 2b + c = 24 \\ 24a + 6b + 2c = 120 \end{cases}$$

On résout pour trouver $a = 9$, $b = -18$, $c = 6$.

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3-at^2-bt-c)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$E=\mathbb{R}[X]$, $\langle P\mid Q\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, il faut calculer $\mathrm{d}(X^3,\mathbb{R}_2[X])^2$.

Méthode classique : on pose $p(X^3)=aX^2+bX+c$ avec :

$$\begin{cases}\langle X^3-aX^2-bX-c\mid 1\rangle=0\\ \langle X^3-aX^2-bX-c\mid X\rangle=0\\ \langle X^3-aX^2-bX-c\mid X^2\rangle=0\end{cases}\iff\begin{cases}2a+b+c=6\\ 6a+2b+c=24\\ 24a+6b+2c=120\end{cases}$$

On résout pour trouver $a=9$, $b=-18$, $c=6$.

On calcule $\mathrm{d}(X^3,\mathbb{R}_2[X])^2=\|X^3-p(X^3)\|^2=\left\langle X^3-p(X^3)\,\middle|\,X^3-p(X^3)\right\rangle$

$$=\left\langle X^3\,\middle|\,X^3-p(X^3)\right\rangle$$

$$=720-120a-24b-6c=36.$$

Projection orthogonale

Un exercice typique

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, il faut calculer $\mathrm{d}(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2$.

Avec la formule de Hadamard :

$$\mathrm{d}(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \frac{\det G(X^3, X^2, X, 1)}{\det G(X^2, X, 1)} = \frac{144}{4} = 36.$$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si (v) est une famille libre, il existe une unique famille orthonormée (e) vérifiant :

- $\forall k \in [\![1, n]\!], \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$;
- $\forall k \in [\![1, n]\!], \langle e_k \mid v_k \rangle > 0$.

On a $e_k = \dfrac{v_k - p_{k-1}(v_k)}{\|v_k - p_{k-1}(v_k)\|}$ où p_{k-1} est la proj. orthog. sur $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$.

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si (v) est une famille libre, il existe une unique famille orthonormée (e) vérifiant :

- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k) = \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_k)$;
- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\langle e_k \mid v_k\rangle > 0$.

On a $e_k = \dfrac{v_k - p_{k-1}(v_k)}{\|v_k - p_{k-1}(v_k)\|}$ où p_{k-1} est la proj. orthog. sur $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_{k-1})$.

La deuxième condition sert uniquement à assurer l'unicité.

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si (v) est une famille libre, il existe une unique famille orthonormée (e) vérifiant :

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$;
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_k \mid v_k \rangle > 0$.

On a $e_k = \dfrac{v_k - p_{k-1}(v_k)}{\|v_k - p_{k-1}(v_k)\|}$ où p_{k-1} est la proj. orthog. sur $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$.

La deuxième condition sert uniquement à assurer l'unicité.

Variante. Dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$ et $(v) = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il existe une unique famille orthogonale (P_n) vérifiant :

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathbb{R}_k[X] \quad \longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \deg P_k = k$;
- le coefficient dominant de P_k est égal à 1.

Familles de polynômes orthogonaux

À chaque produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$ est associé une famille échelonnée en degré de polynômes orthogonaux, dont la condition d'unicité varie.

Familles de polynômes orthogonaux

À chaque produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$ est associé une famille échelonnée en degré de polynômes orthogonaux, dont la condition d'unicité varie.

- $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Legendre.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.

Familles de polynômes orthogonaux

À chaque produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$ est associé une famille échelonnée en degré de polynômes orthogonaux, dont la condition d'unicité varie.

- $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Legendre.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.
- $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Tchebychev.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.

Familles de polynômes orthogonaux

À chaque produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$ est associé une famille échelonnée en degré de polynômes orthogonaux, dont la condition d'unicité varie.

- $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Legendre.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.
- $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Tchebychev.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.
- $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Hermite.
  Condition d'unicité : $\mathrm{cdom}(P_n) = 1$.

Familles de polynômes orthogonaux

À chaque produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$ est associé une famille échelonnée en degré de polynômes orthogonaux, dont la condition d'unicité varie.

- $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Legendre.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.
- $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Tchebychev.
  Condition d'unicité : $P_n(1) = 1$.
- $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Hermite.
  Condition d'unicité : $\mathrm{cdom}(P_n) = 1$.
- $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \longrightarrow$ polynômes de Laguerre.
  Condition d'unicité : $\mathrm{cdom}(P_n) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Isométries vectorielles

$u \in \mathcal{O}(E)$ vérifie : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.

- Si (e) est une b.o.n, $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^T A = I_n$.
- Si (e) et (e') sont deux b.o.n, $P = \mathrm{Mat}_{(e)}(e') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles

$u \in \mathcal{O}(E)$ vérifie : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.

- Si (e) est une b.o.n, $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^T A = I_n$.
- Si (e) et (e') sont deux b.o.n, $P = \mathrm{Mat}_{(e)}(e') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice orthogonale peut être interprétée de deux façons :

- c'est la matrice d'une isométrie dans une b.o.n ;
- c'est la matrice de passage entre deux b.o.n.

Isométries vectorielles

$u \in \mathcal{O}(E)$ vérifie : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.

- Si (e) est une b.o.n, $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^T A = I_n$.
- Si (e) et (e') sont deux b.o.n, $P = \mathrm{Mat}_{(e)}(e') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice orthogonale peut être interprétée de deux façons :

- c'est la matrice d'une isométrie dans une b.o.n ;
- c'est la matrice de passage entre deux b.o.n.

Lorsque $\dim E = 2$, les isométries vectorielles sont de deux types :

- si $\det u = 1$, u est une rotation, et dans toute b.o.n.d (e), $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;
- si $\det u = -1$, u est une symétrie orthogonale, et il existe une b.o.n.d (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Endomorphismes symétriques

$u \in \mathcal{S}(E)$ vérifie : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$.
Si (e) est une b.o.n, $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^T = A$.

Endomorphismes symétriques

$u \in \mathcal{S}(E)$ vérifie : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$.
Si (e) est une b.o.n, $A = \text{Mat}_{(e)}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^T = A$.

- $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une b.o.n ;
- si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^T$.

Conséquence : les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale.

Endomorphismes symétriques

Un résultat à savoir redémontrer

Si u et v sont deux endomorphismes symétriques qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors u et v se diagonalisent dans une même b.o.n.

Endomorphismes symétriques

Un résultat à savoir redémontrer

Si u et v sont deux endomorphismes symétriques qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors u et v se diagonalisent dans une même b.o.n.

- Si $u \circ v = v \circ u$, les sev propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ de u sont stables par v.

Endomorphismes symétriques

Un résultat à savoir redémontrer

Si u et v sont deux endomorphismes symétriques qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors u et v se diagonalisent dans une même b.o.n.

- Si $u \circ v = v \circ u$, les sev propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ de u sont stables par v.
- La restriction de v à E_{λ_i} est tjs symétrique donc il existe une b.o.n (e_i) de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v, qui sont aussi vecteurs propres de u (pour la vp λ_i).

Endomorphismes symétriques

Un résultat à savoir redémontrer

Si u et v sont deux endomorphismes symétriques qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors u et v se diagonalisent dans une même b.o.n.

- Si $u \circ v = v \circ u$, les sev propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ de u sont stables par v.
- La restriction de v à E_{λ_i} est tjs symétrique donc il existe une b.o.n (e_i) de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v, qui sont aussi vecteurs propres de u (pour la vp λ_i).
- Puisque u est symétrique la réunion des bases (e_i) forme une b.o.n de E, constituée de vecteurs propres pour u et pour v.

Endomorphismes symétriques

Un résultat à savoir redémontrer

Si u et v sont deux endomorphismes symétriques qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors u et v se diagonalisent dans une même b.o.n.

- Si $u \circ v = v \circ u$, les sev propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ de u sont stables par v.
- La restriction de v à E_{λ_i} est tjs symétrique donc il existe une b.o.n (e_i) de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v, qui sont aussi vecteurs propres de u (pour la vp λ_i).
- Puisque u est symétrique la réunion des bases (e_i) forme une b.o.n de E, constituée de vecteurs propres pour u et pour v.

Traduction matricielle. Si A et B sont deux matrices symétriques telles que $AB = BA$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_1, D_2 diagonales telles que

$$A = PD_1P^{\perp} \quad \text{et} \quad B = PD_2P^{\perp}$$

Endomorphismes symétriques

Un autre résultat à savoir redémontrer

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique il y a équivalence entre :

1. pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T AX \geqslant 0$;
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On dit dans ce cas que A est positif.

Endomorphismes symétriques

Un autre résultat à savoir redémontrer

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique il y a équivalence entre :

1. pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T AX \geqslant 0$;
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On dit dans ce cas que A est positif.

- (1) $\Longrightarrow$ (2).
  Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, $X^T AX = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$.

Endomorphismes symétriques

Un autre résultat à savoir redémontrer

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique il y a équivalence entre :

1. pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T AX \geqslant 0$;
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On dit dans ce cas que A est positif.

- $(1) \implies (2)$.
  Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, $X^T AX = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$.
- $(2) \implies (1)$.
  Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ tel que $A = PDP^T$. Alors $X^T AX = Y^T DY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$ avec $Y = P^T X$.

Endomorphismes symétriques

Un autre résultat à savoir redémontrer

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique il y a équivalence entre :

1. pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T AX \geqslant 0$;
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On dit dans ce cas que A est positif.

- $(1) \implies (2)$.
  Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, $X^T AX = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$.
- $(2) \implies (1)$.
  Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ tel que
  $A = PDP^T$. Alors $X^T AX = Y^T DY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$ avec $Y = P^T X$.

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique il y a équivalence entre :

1. pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, $X^T AX > 0$;
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On dit dans ce cas que A est défini positif.

Endomorphismes symétriques

Application

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Endomorphismes symétriques

Application

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Si $B^2 = A$ alors $AB = BA$. Et puisque A et B sont symétriques, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^T AP$ et $D_2 = P^T BP$ sont diagonales.

Endomorphismes symétriques

Application

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Si $B^2 = A$ alors $AB = BA$. Et puisque A et B sont symétriques, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^T AP$ et $D_2 = P^T BP$ sont diagonales.

On pose $D_1 = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $D_2 = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Alors :

$$B^2 = A \iff D_2^2 = D_1 \iff \forall k,\ b_k^2 = a_k$$

Endomorphismes symétriques

Application

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Si $B^2 = A$ alors $AB = BA$. Et puisque A et B sont symétriques, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^T AP$ et $D_2 = P^T BP$ sont diagonales.

On pose $D_1 = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $D_2 = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Alors :

$$B^2 = A \iff D_2^2 = D_1 \iff \forall k,\ b_k^2 = a_k$$

Dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ il y a une unique solution donnée par $b_k = \sqrt{a_k}$.

Endomorphismes symétriques

Application

Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Si $B^2 = A$ alors $AB = BA$. Et puisque A et B sont symétriques, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^T AP$ et $D_2 = P^T BP$ sont diagonales.

On pose $D_1 = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $D_2 = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Alors :

$$B^2 = A \iff D_2^2 = D_1 \iff \forall k,\ b_k^2 = a_k$$

Dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ il y a une unique solution donnée par $b_k = \sqrt{a_k}$.

C'est pareil avec $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes symétriques

Décomposition polaire

Toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes symétriques

Décomposition polaire

Toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$A^T A$ est symétrique et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, $X^T A^T A X = \|AX\|^2 > 0$ donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes symétriques

Décomposition polaire

Toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$A^T A$ est symétrique et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, $X^T A^T A X = \|AX\|^2 > 0$ donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Il existe donc une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = S^2$.

On pose $O = AS^{-1}$. Alors : $O^T O = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I$ donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Et pour finir ...

un bonus en algèbre linéaire

Avec le programme de PC, il est difficile de prouver ce résultat d'algèbre linéaire (HP) :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, et H un sev stable par u. Alors l'induit de u sur H est diagonalisable.

Et pour finir ...

un bonus en algèbre linéaire

Avec le programme de PC, il est difficile de prouver ce résultat d'algèbre linéaire (HP) :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, et H un sev stable par u. Alors l'induit de u sur H est diagonalisable.

Soit (e) une base formée de vecteurs propres de u : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Et pour finir ...

un bonus en algèbre linéaire

Avec le programme de PC, il est difficile de prouver ce résultat d'algèbre linéaire (HP) :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, et H un sev stable par u. Alors l'induit de u sur H est diagonalisable.

Soit (e) une base formée de vecteurs propres de u : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

On définit un produit scalaire en posant : $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Et pour finir …

un bonus en algèbre linéaire

Avec le programme de PC, il est difficile de prouver ce résultat d'algèbre linéaire (HP) :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, et H un sev stable par u. Alors l'induit de u sur H est diagonalisable.

Soit (e) une base formée de vecteurs propres de u : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

On définit un produit scalaire en posant : $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Pour ce produit scalaire u est un endomorphisme symétrique.

Et pour finir …

un bonus en algèbre linéaire

Avec le programme de PC, il est difficile de prouver ce résultat d'algèbre linéaire (HP) :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, et H un sev stable par u. Alors l'induit de u sur H est diagonalisable.

Soit (e) une base formée de vecteurs propres de u : tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

On définit un produit scalaire en posant : $\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Pour ce produit scalaire u est un endomorphisme symétrique.

La restriction d'un endomorphisme symétrique à un sev stable est toujours symétrique donc (théorème spectral) u_H est diagonalisable.