Interrogation sur les espaces euclidiens

Durée : libre

Exercice 1

Soit E un espace euclidien et $(b_1,\dots,b_n)$ une base quelconque (non nécessairement orthonormée) de E.

a) (1 pt) Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\langle b_k \mid x\rangle = 0$. Montrer que $x = 0_{\mathrm{E}}$.

b) (1,5 pts) Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\langle b_k \mid x\rangle = \alpha_k$.

Exercice 2

(1,5 pts) Soit $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de norme 1 (pour le produit scalaire usuel). Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$.

Exercice 3

(2 pts) Soit E un espace euclidien, H un sous-espace vectoriel de E, et $x \in \mathrm{E}$. On pose $\mathcal{H} = x + \mathrm{H} = \left\{x + h \;\middle|\; h \in \mathrm{H}\right\}$. Montrer que $\inf\limits_{y\in\mathcal{H}} \|y\| = \|x - x_1\|$ où x_1 est le projeté orthogonal de x sur H.

Exercice 4

(1,5 pts) Soit E un espace euclidien, H un sous-espace vectoriel de E et $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note e'_k le projeté orthogonal de e_k sur H. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|e'_k\|^2 = \dim \mathrm{H}$ (*faire intervenir une base orthonormée de* H).

Exercice 5

(2 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et on considère la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une projection orthogonale. Montrer qu'il existe des vecteurs unitaires $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathrm{X}_k\mathrm{X}_k^{\mathrm{T}}$.

Exercice 6

(1,5 pts) Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ un endomorphisme symétrique. Montrer que $\max\big(\mathrm{Sp}(u)\big) = \max\limits_{x\neq 0_{\mathrm{E}}} \dfrac{\langle x \mid u(x)\rangle}{\|x\|^2}$.

Exercice 7

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres.

a) (1,5 pts) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

b) (1 pt) En déduire que si $\chi_{\mathrm{A}}(x) = (x - a_{11})\cdots(x - a_{nn})$, la matrice A est diagonale.

Exercice 8

On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, et on note $\mathcal{K}$ l'ensemble des matrices $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset [-1,1]$.

a) (1,5 pts) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{K}$ si et seulement si pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, $\left|\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{AX}\rangle\right| \leqslant \|\mathrm{X}\|^2$.

b) (1,5 pts) Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{K}$. Exprimer $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$ à l'aide des a_{ij} et en déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant n$.

c) (2 pts) Déduire des deux questions précédentes que $\mathcal{K}$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) (1,5 pts) Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{B} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\big)$. Montrer que $\left|\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{BX}\rangle\right| \leqslant \|\mathrm{X}\|^2$, et en déduire que $\mathrm{A} \in \mathcal{K}$.