

CORRIGÉ : INTERROGATION SUR LES ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1

a) (b) est une base donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans \mathbb{R} tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$. Par linéarité on en déduit $\|x\|^2 = 0$, soit $x = 0_E$.

b) Considérons l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x) = (\langle b_1 | x \rangle, \dots, \langle b_n | x \rangle)$. Il s'agit d'une application linéaire, injective d'après la première question. Puisque $\dim E = n = \dim \mathbb{R}^n$, ϕ est un isomorphisme donc tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ possède un unique antécédent.

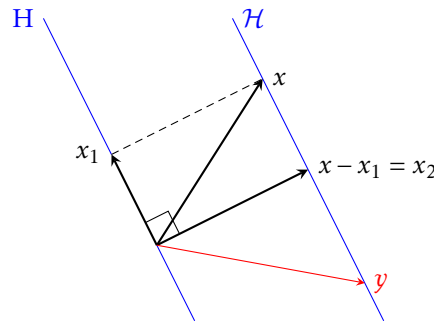
Exercice 2

Notons p cette projection. Pour tout $x \in E$ on a $p(x) = \langle a | x \rangle a$. En notant (e) la base canonique de \mathbb{R}^n on a $p(e_j) = a_j a$. Les coordonnées de ce vecteur se retrouvent dans la j^e colonne de la matrice de la projection; cette dernière est donc égale à $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Autre preuve : on identifie les vecteurs x et a aux matrices colonnes X et A . Alors $p(X) = \langle A | X \rangle A = (A^T X) A$ et puisque $A^T X$ est un scalaire on peut aussi écrire $p(X) = A(A^T X) = (AA^T) X$ donc la matrice demandée est AA^T .

Exercice 3

Commençons par faire un dessin :



Posons $x_2 = x - x_1$. On a $x_2 \in H^\perp$ et $x_2 \in \mathcal{H}$ puisque $x \in \mathcal{H}$ et $x_1 \in H$.

Pour tout $y \in \mathcal{H}$ on a $y = x_2 + (y - x_2)$. Par ailleurs, $y \in \mathcal{H}$ et $x_2 \in \mathcal{H}$ donc $y - x_2 \in H$ et ainsi $\langle x_2 | y - x_2 \rangle = 0$. D'après le théorème de Pythagore on a donc $\|y\|^2 = \|x_2\|^2 + \|y - x_2\|^2 \geq \|x_2\|^2$ avec égalité si (et seulement si) $y = x_2$, ce qui prouve que $\inf_{y \in \mathcal{H}} \|y\| = \|x_2\| = \|x - x_1\|$.

Exercice 4

Soit (f_1, \dots, f_p) une base orthonormée de H . Alors $e'_k = \sum_{i=1}^p \langle f_i | e_k \rangle f_i$ et $\|e'_k\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle f_i | e_k \rangle^2$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \|e'_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \langle f_i | e_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \langle f_i | e_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 = p = \dim H$$

Exercice 5

Toute projection orthogonale est diagonalisable dans une base orthonormée donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Notons (E_1, \dots, E_n) la base canonique de \mathbb{R}^n ; alors $D = \sum_{k=1}^r E_k E_k^T$.

On en déduit que $A = \sum_{k=1}^r P E_k E_k^T P^T = \sum_{k=1}^r X_k X_k^T$ avec $X_k = P E_k$.

Exercice 6

u est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée (e). Posons $u(e_k) = \lambda_k e_k$; sans perte de généralité on peut supposer $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, de sorte que $\max(\text{Sp}(u)) = \lambda_n$.

Pour tout $x \in E$, posons $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Alors $u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k$ donc $\langle x | u(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \leq \lambda_n \sum_{k=1}^n x_k^2 = \lambda_n \|x\|^2$ et ainsi, pour $x \neq 0_E$, $\frac{\langle x | u(x) \rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_n$. Cette majoration est atteinte pour $x = e_n$, donc $\max_{x \neq 0_E} \frac{\langle x | u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \lambda_n$.

Exercice 7

a) A est symétrique réelle donc diagonalisable. Elle est donc semblable à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. A^2 est donc semblable à $\text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ et ainsi, $\text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

Par ailleurs, le coefficient de rang (i, i) de A^2 vaut $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ donc $\text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$. D'où l'égalité.

b) Si $\chi_A(x) = (x - a_{11}) \dots (x - a_{nn})$ alors $\text{Sp}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ et ainsi, $\text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n a_{kk}^2$. D'après la question précédente on en déduit que $\sum_{i \neq j} a_{ij}^2 = 0$, soit $i \neq j \implies a_{ij} = 0$. La matrice A est diagonale.

Exercice 8

a) C'est sensiblement la même démarche que dans l'exercice 6, mais matriciellement : A est diagonalisable dans une base orthonormée donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PDP^T$. Alors $\langle X | AX \rangle = X^T PDP^T X = YDY^T$ avec $Y = P^T X$. Ainsi, $\langle X | AX \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$.

Si $A \in \mathcal{K}$ alors $|\langle X | AX \rangle| \leq \sum_{k=1}^n y_k^2 = \|Y\|^2 = \|P^T X\|^2 = \|X\|^2$ puisque P est orthogonale.

Réciproquement, si pour tout $X \in E$, $|\langle X | AX \rangle| \leq \|X\|^2$, on applique cette majoration à un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k pour obtenir $|\lambda_k| \cdot \|X_k\|^2 \leq \|X_k\|^2$, soit $|\lambda_k| \leq 1$ puisque $X_k \neq 0$. On a bien $A \in \mathcal{K}$.

b) C'est cette fois-ci semblable à l'exercice 7 : $[A^T A]_{jj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$ donc $\text{tr}(A^T A) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$.

Par ailleurs, $A^T A = A^2 = PD^2 P^T$ donc $|\text{tr}(A^T A)| = |\text{tr}(D^2)| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \leq n$ car $A \in \mathcal{K}$, donc $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \leq n$.

c) La question précédente montre que pour la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, \mathcal{K} est inclus dans la boule fermée de centre O (la matrice nulle) et de rayon \sqrt{n} , donc \mathcal{K} est bornée.

Pour montrer que \mathcal{K} est fermé, considérons une suite (A_p) de matrices de \mathcal{A} qui converge vers une matrice A . D'après la première question, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $X \in E$, $|\langle X | A_p X \rangle| \leq \|X\|^2$. En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient $|\langle X | AX \rangle| \leq \|X\|^2$ donc $A \in \mathcal{K}$, ce qui montre que \mathcal{K} est un fermé.

d) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle X | BX \rangle| \leq \|X\| \cdot \|BX\| = \|X\|^2$ car $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Il en est de même avec B^T puisque $B^T \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$|\langle X | AX \rangle| \leq \frac{1}{2} \left(|\langle X | BX \rangle| + |\langle X | B^T X \rangle| \right) \leq \frac{1}{2} (\|X\|^2 + \|X\|^2) = \|X\|^2$$

donc $A \in \mathcal{K}$ d'après la première question.