Séries entières et équations différentielles

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Définitions d'Abel : $R = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \;\middle|\; \text{la suite } (|a_n|\rho^n) \text{ est majorée}\right\}$

$$= \sup\left\{\rho \geqslant 0 \;\middle|\; \lim |a_n|\rho^n = 0\right\}$$

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Définitions d'Abel : $R = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, \text{la suite } (|a_n|\rho^n) \text{ est majorée}\right\}$

$$= \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, \lim |a_n|\rho^n = 0\right\}$$

Si possible, on applique le critère de d'Alembert à la suite $u_n = a_n z^n$ pour calculer R.

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Définitions d'Abel : $R = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \;\middle|\; \text{la suite } (|a_n|\rho^n) \text{ est majorée}\right\}$

$$= \sup\left\{\rho \geqslant 0 \;\middle|\; \lim |a_n|\rho^n = 0\right\}$$

Si possible, on applique le critère de d'Alembert à la suite $u_n = a_n z^n$ pour calculer R.

Déterminer le rayon de CV de $\sum \operatorname{ch}(n) z^{2n}$.

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Définitions d'Abel : $R = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, \text{la suite } (|a_n|\rho^n) \text{ est majorée}\right\}$

$$= \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, \lim |a_n|\rho^n = 0\right\}$$

Si possible, on applique le critère de d'Alembert à la suite $u_n = a_n z^n$ pour calculer R.

Déterminer le rayon de CV de $\sum \mathrm{ch}(n) z^{2n}$.

$$u_n = \mathrm{ch}(n) z^{2n} \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \sim \frac{e^{n+1}}{e^n}|z|^2 = e|z|^2 \text{ donc :}$$

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;
- $|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Définitions d'Abel : $R = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, \text{la suite } (|a_n|\rho^n) \text{ est majorée}\right\}$

$$= \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, \lim |a_n|\rho^n = 0\right\}$$

Si possible, on applique le critère de d'Alembert à la suite $u_n = a_n z^n$ pour calculer R.

Déterminer le rayon de CV de $\sum \operatorname{ch}(n) z^{2n}$.

$$u_n = \operatorname{ch}(n) z^{2n} \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \sim \frac{e^{n+1}}{e^n}|z|^2 = e|z|^2 \text{ donc :}$$

- $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{e}} \implies \lim\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \implies \sum u_n$ CV donc $R \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;
- $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{e}} \implies \lim\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1 \implies \sum u_n$ DV donc $R \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ $(\alpha > 0)$.

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ $(\alpha > 0)$.

- $\rho < R_b \implies \lim b_n \rho^n = 0 \implies \lim \dfrac{b_n}{n^\alpha}\rho^n = 0 \implies \rho \leqslant R_a$.

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ ($\alpha > 0$).

- $\rho < R_b \implies \lim b_n \rho^n = 0 \implies \lim \dfrac{b_n}{n^\alpha}\rho^n = 0 \implies \rho \leqslant R_a$.
  On a montré que $[0, R_b[\subset [0, R_a]$ donc $R_b \leqslant R_a$.

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ $(\alpha > 0)$.

- $\rho < R_b \implies \lim b_n \rho^n = 0 \implies \lim \dfrac{b_n}{n^\alpha}\rho^n = 0 \implies \rho \leqslant R_a$.
  On a montré que $[0, R_b[\subset [0, R_a]$ donc $R_b \leqslant R_a$.
- $\rho < R_a \implies \lim a_n \rho^n = 0 \implies \lim n^\alpha a_n \rho^n = ???$ Échec!

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ $(\alpha > 0)$.

- $\rho < R_b \implies \lim b_n \rho^n = 0 \implies \lim \dfrac{b_n}{n^\alpha}\rho^n = 0 \implies \rho \leqslant R_a$.
  On a montré que $[0, R_b[\subset [0, R_a]$ donc $R_b \leqslant R_a$.
- $\rho < R_a \implies \lim a_n \rho^n = 0 \implies \lim n^\alpha a_n \rho^n = ???$ Échec!
- Nouvelle tentative. Soit $\rho < r < R_a$. On a $a_n \rho^n = a_n r^n \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$ donc $n^\alpha a_n \rho^n = (a_n r^n) \times n^\alpha \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$.

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ ($\alpha > 0$).

- $\rho < R_b \implies \lim b_n \rho^n = 0 \implies \lim \dfrac{b_n}{n^\alpha}\rho^n = 0 \implies \rho \leqslant R_a$.
  On a montré que $[0, R_b[\subset [0, R_a]$ donc $R_b \leqslant R_a$.
- $\rho < R_a \implies \lim a_n \rho^n = 0 \implies \lim n^\alpha a_n \rho^n = ???$ Échec!
- Nouvelle tentative. Soit $\rho < r < R_a$. On a $a_n \rho^n = a_n r^n \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$ donc
  $n^\alpha a_n \rho^n = (a_n r^n) \times n^\alpha \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$.
  $r < R_a \implies \lim a_n r^n = 0$ et $\dfrac{\rho}{r} < 1 \implies \lim n^\alpha \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n = 0$ donc
  $\lim n^\alpha a_n \rho^n = 0$ et $\rho \leqslant R_b$.

Séries entières

Utilisation de la définition d'Abel

Comparer les rayons de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = n^\alpha a_n$ $(\alpha > 0)$.

- $\rho < R_b \implies \lim b_n \rho^n = 0 \implies \lim \dfrac{b_n}{n^\alpha}\rho^n = 0 \implies \rho \leqslant R_a$.
  On a montré que $[0, R_b[\subset [0, R_a]$ donc $R_b \leqslant R_a$.
- $\rho < R_a \implies \lim a_n \rho^n = 0 \implies \lim n^\alpha a_n \rho^n =$??? Échec!
- Nouvelle tentative. Soit $\rho < r < R_a$. On a $a_n \rho^n = a_n r^n \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$ donc
  $n^\alpha a_n \rho^n = (a_n r^n) \times n^\alpha \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$.
  $r < R_a \implies \lim a_n r^n = 0$ et $\dfrac{\rho}{r} < 1 \implies \lim n^\alpha \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n = 0$ donc
  $\lim n^\alpha a_n \rho^n = 0$ et $\rho \leqslant R_b$.
  On a montré que $\rho < R_a \implies \rho \leqslant R_b$ donc $[0, R_a[\subset [0, R_b]$ et $R_a \leqslant R_b$.

Conclusion : $R_a = R_b$.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.
- La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.
- La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.
- La dérivation formelle d'une série entière a même rayon de convergence que la série initiale.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.
- La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.
- La dérivation formelle d'une série entière a même rayon de convergence que la série initiale.

Comparer les rayon de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = \dfrac{n^n a_n}{n!} z^n$.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.
- La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.
- La dérivation formelle d'une série entière a même rayon de convergence que la série initiale.

Comparer les rayon de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = \dfrac{n^n a_n}{n!} z^n$.

$b_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}} a_n$ donc $R_b = R_c$ avec $c_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^n$.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.
- La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.
- La dérivation formelle d'une série entière a même rayon de convergence que la série initiale.

Comparer les rayon de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = \dfrac{n^n a_n}{n!} z^n$.

$b_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}} a_n$ donc $R_b = R_c$ avec $c_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^n$.
Exercice précédent $\longrightarrow R_c = R_d$ avec $d_n = a_n \,\mathrm{e}^n$.

Séries entières

Théorèmes de comparaisons

- Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $R_b = R_a$.
- La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.
- La dérivation formelle d'une série entière a même rayon de convergence que la série initiale.

Comparer les rayon de CV de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ avec $b_n = \dfrac{n^n a_n}{n!} z^n$.

$b_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}} a_n$ donc $R_b = R_c$ avec $c_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^n$.

Exercice précédent $\longrightarrow R_c = R_d$ avec $d_n = a_n \mathrm{e}^n$.

$$d_n z^n = a_n(\mathrm{e}\, z)^n \text{ donc } |z| < \frac{R_a}{\mathrm{e}} \implies \sum d_n z^n \text{ CVA donc } \frac{R_a}{\mathrm{e}} \leqslant R_d$$

$$|z| < R_d \implies \sum a_n(ez)^n \text{ CVA donc } \mathrm{e}\, R_d \leqslant R_a$$

Séries entières d'une variable réelle

La CV d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-R,R[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme.

Séries entières d'une variable réelle

La CV d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-R,R[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme.

Unicité du développement en série entière. Deux séries entières ont des sommes égales au voisinage de 0 ssi elles ont même coefficients.

Séries entières d'une variable réelle

La CV d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-R,R[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme.
Unicité du développement en série entière. Deux séries entières ont des sommes égales au voisinage de 0 ssi elles ont même coefficients.

Application :

- Une fonction DSE paire au voisinage de zéro a tous ses coefficients impairs nuls.

Séries entières d'une variable réelle

La CV d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-R,R[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme.

Unicité du développement en série entière. Deux séries entières ont des sommes égales au voisinage de 0 ssi elles ont même coefficients.

Application :

- Une fonction DSE paire au voisinage de zéro a tous ses coefficients impairs nuls.
  Si $f(x) = \sum_n a_n x^n$ alors $f(-x) = \sum_n (-1)^n a_n x^n$ donc $a_n = (-1)^n a_n$ (unicité du DSE).

Séries entières d'une variable réelle

La CV d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-R,R[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme.

Unicité du développement en série entière. Deux séries entières ont des sommes égales au voisinage de 0 ssi elles ont même coefficients.

Application :

- Une fonction DSE paire au voisinage de zéro a tous ses coefficients impairs nuls.
  Si $f(x) = \sum_n a_n x^n$ alors $f(-x) = \sum_n (-1)^n a_n x^n$ donc $a_n = (-1)^n a_n$ (unicité du DSE).
- Une fonction DSE impaire au voisinage de zéro a tous ses coefficients pairs nuls (idem).

Séries entières d'une variable réelle

La CV d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-R,R[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme.

Unicité du développement en série entière. Deux séries entières ont des sommes égales au voisinage de 0 ssi elles ont même coefficients.

Application :

- Une fonction DSE paire au voisinage de zéro a tous ses coefficients impairs nuls.
  Si $f(x)=\sum_n a_n x^n$ alors $f(-x)=\sum_n (-1)^n a_n x^n$ donc $a_n=(-1)^n a_n$ (unicité du DSE).
- Une fonction DSE impaire au voisinage de zéro a tous ses coefficients pairs nuls (idem).

Produit de Cauchy. lorsque $|x|<\min(R_a,R_b)$,

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{avec} \quad c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ e^{-1/x} & \text{si } x>0\end{cases}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout $x>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)=P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}$.

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$.

  Récurrence :
  - $P_0 = 1$
  - si $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ alors $f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2}\left(-P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-1/x}$

    donc $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$.

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$.

  Récurrence :
  - $P_0 = 1$
  - si $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ alors $f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2}\left(-P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-1/x}$

    donc $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{0^+} f^{(n)}(x) = 0$ (croissances comparées).

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$.

  Récurrence :
  - $P_0 = 1$
  - si $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ alors $f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2}\left(-P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-1/x}$

    donc $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{0^+} f^{(n)}(x) = 0$ (croissances comparées).
- On en déduit que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (récurrence + th. de la limite de la dérivée) avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Un exemple de fonction non DSE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}$.

  Récurrence :
  - $P_0 = 1$
  - si $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ alors $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(-P_n'\left(\dfrac{1}{x}\right) + P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)e^{-1/x}$ donc $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{0^+} f^{(n)}(x) = 0$ (croissances comparées).
- On en déduit que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (récurrence + th. de la limite de la dérivée) avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Si f était DSE au vois. de 0 on aurait $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Equations différentielles linéaires

Équations du premier ordre

En dimension 1 (fonctions numériques) :

- Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{U(t)}$ avec $U'(t) = u(t)$.

Equations différentielles linéaires

Équations du premier ordre

En dimension 1 (fonctions numériques) :

- Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{U(t)}$ avec $U'(t) = u(t)$.
- Les solutions de $x' = u(t)x + v(t)$ forment un espace affine de dimension 1 : $x(t) = (V(t) + \lambda)\mathrm{e}^{U(t)}$ avec $V'(t) = v(t)\mathrm{e}^{-U(t)}$.

Equations différentielles linéaires

Équations du premier ordre

En dimension 1 (fonctions numériques) :

- Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{U(t)}$ avec $U'(t) = u(t)$.
- Les solutions de $x' = u(t)x + v(t)$ forment un espace affine de dimension 1 : $x(t) = (V(t) + \lambda)\mathrm{e}^{U(t)}$ avec $V'(t) = v(t)\mathrm{e}^{-U(t)}$.
- **Problème de Cauchy**. Pour toute condition initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$.

Equations différentielles linéaires

Équations du premier ordre

En dimension 1 (fonctions numériques) :

- Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{U(t)}$ avec $U'(t) = u(t)$.
- Les solutions de $x' = u(t)x + v(t)$ forment un espace affine de dimension 1 : $x(t) = (V(t) + \lambda)\mathrm{e}^{U(t)}$ avec $V'(t) = v(t)\mathrm{e}^{-U(t)}$.
- **Problème de Cauchy.** Pour toute condition initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$.

En dimension $\boldsymbol{n}$ (systèmes différentiels) :

- Les solutions dans $\mathbb{R}^n$ de $X' = A(t)X$ forment un espace vectoriel de dimension n.

Equations différentielles linéaires

Équations du premier ordre

En dimension 1 (fonctions numériques) :

- Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{U(t)}$ avec $U'(t) = u(t)$.
- Les solutions de $x' = u(t)x + v(t)$ forment un espace affine de dimension 1 : $x(t) = (V(t) + \lambda)\mathrm{e}^{U(t)}$ avec $V'(t) = v(t)\mathrm{e}^{-U(t)}$.
- **Problème de Cauchy**. Pour toute condition initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$.

En dimension n (systèmes différentiels) :

- Les solutions dans $\mathbb{R}^n$ de $X' = A(t)X$ forment un espace vectoriel de dimension n.
- Les solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ forment un espace affine de dimension n : $X(t) = X_{\text{part}}(t) + \widetilde{X}(t)$ où $\widetilde{X}$ est solution de $\widetilde{X}' = A(t)\widetilde{X}$.

Equations différentielles linéaires

Équations du premier ordre

En dimension 1 (fonctions numériques) :

- Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{U(t)}$ avec $U'(t) = u(t)$.
- Les solutions de $x' = u(t)x + v(t)$ forment un espace affine de dimension 1 : $x(t) = (V(t) + \lambda)\mathrm{e}^{U(t)}$ avec $V'(t) = v(t)\mathrm{e}^{-U(t)}$.
- **Problème de Cauchy**. Pour toute condition initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$.

En dimension *n* (systèmes différentiels) :

- Les solutions dans $\mathbb{R}^n$ de $X' = A(t)X$ forment un espace vectoriel de dimension n.
- Les solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ forment un espace affine de dimension n : $X(t) = X_{\text{part}}(t) + \widetilde{X}(t)$ où $\widetilde{X}$ est solution de $\widetilde{X}' = A(t)\widetilde{X}$.
- **Problème de Cauchy**. Pour toute condition initiale (t_0, X_0) il existe une unique solution vérifiant $X(t_0) = X_0$.

Équations différentielles linéaires

Équations du second ordre

- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 2.

Équations différentielles linéaires

Équations du second ordre

- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 2.
- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ forment un espace affine de dimension 2 : $x(t) = x_{\text{part}}(t) + \widetilde{x}(t)$ avec $\widetilde{x}'' = u(t)\widetilde{x}' + v(t)\widetilde{x}$.

Équations différentielles linéaires

Équations du second ordre

- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 2.
- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ forment un espace affine de dimension 2 : $x(t) = x_{\text{part}}(t) + \widetilde{x}(t)$ avec $\widetilde{x}'' = u(t)\widetilde{x}' + v(t)\widetilde{x}$.
- **Problème de Cauchy.** Pour toute condition initiale (t_0, x_0, x_0') il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

Équations différentielles linéaires

Équations du second ordre

- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 2.
- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ forment un espace affine de dimension 2 : $x(t) = x_{\text{part}}(t) + \widetilde{x}(t)$ avec $\widetilde{x}'' = u(t)\widetilde{x}' + v(t)\widetilde{x}$.
- **Problème de Cauchy.** Pour toute condition initiale (t_0, x_0, x_0') il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

Méthode de Lagrange (HP). Si on connait une solution $x_1(t)$ ne s'annulant pas, poser $x(t) = x_1(t)y(t)$ pour trouver toutes les autres.

Équations différentielles linéaires

Équations du second ordre

- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 2.
- Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ forment un espace affine de dimension 2 : $x(t) = x_{\text{part}}(t) + \widetilde{x}(t)$ avec $\widetilde{x}'' = u(t)\widetilde{x}' + v(t)\widetilde{x}$.
- **Problème de Cauchy.** Pour toute condition initiale (t_0, x_0, x_0') il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

Méthode de Lagrange (HP). Si on connait une solution $x_1(t)$ ne s'annulant pas, poser $x(t) = x_1(t)y(t)$ pour trouver toutes les autres.

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x'' + (1-3t)x' - x = 0$ en commençant par chercher une solution DSE.

Un exemple d'exercice

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x''+(1-3t)x'-x=0$ en commençant par chercher une solution DSE.

Un exemple d'exercice

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x''+(1-3t)x'-x=0$ en commençant par chercher une solution DSE.

On pose $x(t)=\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ en supposant $R>0$. x est solution ssi :

$$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n\geqslant 1} na_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 1} 3na_n t^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = 0$$

$$\iff \sum_{n\geqslant 1} n^2 a_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 0} (n+1)^2 a_n t^n = 0$$

Un exemple d'exercice

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x''+(1-3t)x'-x=0$ en commençant par chercher une solution DSE.

On pose $x(t)=\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ en supposant $R>0$. x est solution ssi :

$$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n\geqslant 1} na_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 1} 3na_n t^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = 0$$

$$\iff \sum_{n\geqslant 1} n^2 a_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 0} (n+1)^2 a_n t^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 (a_{n+1}-a_n) t^n = 0.$$

Un exemple d'exercice

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x''+(1-3t)x'-x=0$ en commençant par chercher une solution DSE.

On pose $x(t)=\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ en supposant $R>0$. x est solution ssi :

$$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n\geqslant 1} na_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 1} 3na_n t^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = 0$$

$$\iff \sum_{n\geqslant 1} n^2 a_n t^{n-1} - \sum_{n\geqslant 0} (n+1)^2 a_n t^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 (a_{n+1}-a_n) t^n = 0.$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=a_n$ donc $x(t)=\dfrac{a_0}{1-t}$. On vérifie que $R=1$ donc $t\mapsto\dfrac{1}{1-t}$ est solution.

Un exemple d'exercice

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x''+(1-3t)x'-x=0$ en commençant par chercher une solution DSE.

On pose $x(t)=\dfrac{y(t)}{1-t}$. Alors x est solution ssi : $ty''+y'=0$.

Un exemple d'exercice

Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $t(1-t)x''+(1-3t)x'-x=0$ en commençant par chercher une solution DSE.

On pose $x(t)=\dfrac{y(t)}{1-t}$. Alors x est solution ssi : $ty''+y'=0$.

On résout (eq. du premier ordre) : $y'(t)=\dfrac{\lambda}{t}$, puis $y(t)=\lambda\ln(t)+\mu$ donc

$$x(t)=\lambda\frac{\ln(t)}{1-t}+\mu\frac{1}{1-t}.$$

C'est bien un espace vectoriel de dimension 2.

Wronskien

d'un système différentiel

Si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de n solutions de $X' = A(t)X$, on pose $w(t) = \det\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big)$. Il y a équivalence entre :

1. $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

Wronskien

d'un système différentiel

Si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de n solutions de $X' = A(t)X$, on pose $w(t) = \det\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big)$. Il y a équivalence entre :

1. $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

- (2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.

Wronskien

d'un système différentiel

Si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de n solutions de $X' = A(t)X$, on pose $w(t) = \det\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big)$. Il y a équivalence entre :

1. $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

- (2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.
- (3) $\Longrightarrow$ (1) par contraposée : s'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 X_i = 0$ alors $\forall t \in I$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) = 0$ et donc $w(t) = 0$.

Wronskien

d'un système différentiel

Si $(X_1,\ldots,X_n)$ est une famille de n solutions de $X' = A(t)X$, on pose $w(t) = \det\big(X_1(t),\ldots,X_n(t)\big)$. Il y a équivalence entre :

1. $(X_1,\ldots,X_n)$ est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

- (2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.
- (3) $\Longrightarrow$ (1) par contraposée : s'il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \neq (0,\ldots,0)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 X_i = 0$ alors $\forall t \in I$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) = 0$ et donc $w(t) = 0$.
- (1) $\Longrightarrow$ (2) par contraposée : on suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tq $w(t_0) = 0$.

Wronskien

d'un système différentiel

Si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de n solutions de $X' = A(t)X$, on pose $w(t) = \det\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big)$. Il y a équivalence entre :

1. $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

- (2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.
- (3) $\Longrightarrow$ (1) par contraposée : s'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 X_i = 0$ alors $\forall t \in I$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) = 0$ et donc $w(t) = 0$.
- (1) $\Longrightarrow$ (2) par contraposée : on suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tq $w(t_0) = 0$.

  Il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t_0) = 0$.

Wronskien

d'un système différentiel

Si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de n solutions de $X' = A(t)X$, on pose $w(t) = \det\Big(X_1(t),\dots,X_n(t)\Big)$. Il y a équivalence entre :

1. $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

- (2) $\Longrightarrow$ (3) est évident.
- (3) $\Longrightarrow$ (1) par contraposée : s'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 X_i = 0$ alors $\forall t \in I$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) = 0$ et donc $w(t) = 0$.
- (1) $\Longrightarrow$ (2) par contraposée : on suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tq $w(t_0) = 0$.

  Il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t_0) = 0$.

  La fonction $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ est solution et vérifie la cond. de Cauchy $X(t_0) = 0$

  donc (unicité de la sol.) $X = 0$: la famille $(X_1,\dots,X_n)$ est liée.

Wronskien

d'une équation du second ordre

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, on pose $w(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)$. Il y a équivalence entre :

1. (x_1, x_2) est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

Wronskien

d'une équation du second ordre

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, on pose $w(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)$. Il y a équivalence entre :

1. (x_1, x_2) est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

C'est pareil car $w(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}$.

Wronskien

d'une équation du second ordre

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, on pose $w(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)$. Il y a équivalence entre :

1. (x_1, x_2) est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

C'est pareil car $w(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}$.

- (3) $\Longrightarrow$ (1) par contraposée : si $\lambda_1 x_1 + \mu x_2 = 0$ alors $\lambda x_1' + \mu x_2' = 0$ et pour tout $t \in I$, $\lambda \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ donc $w(t) = 0$.

Wronskien

d'une équation du second ordre

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, on pose $w(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)$. Il y a équivalence entre :

1. (x_1, x_2) est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

C'est pareil car $w(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}$.

- (3) $\Longrightarrow$ (1) par contraposée : si $\lambda_1 x_1 + \mu x_2 = 0$ alors $\lambda x_1' + \mu x_2' = 0$ et pour tout $t \in I$, $\lambda \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ donc $w(t) = 0$.
- (1) $\Longrightarrow$ (2) par contraposée : si $w(t_0) = 0$, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ x_1(t_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2'(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = 0$ et la fonction $x = \lambda x_1 + \mu x_2$ est solution et vérifie la cond. de Cauchy $x(t_0) = 0$ et $x'(t_0) = 0$ donc $x = 0$ et la famille (x_1, x_2) est liée.

Wronskien

d'une équation du second ordre

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, on pose $w(t) = x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)$. Il y a équivalence entre :

1. (x_1, x_2) est un système fondamental de solution ;
2. pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$;
3. il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

C'est pareil car $w(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}$.

Remarque. On calcule $w'(t) = x_1''(t)x_2(t) - x_1(t)x_2''(t) = u(t)w(t)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) = \lambda e^{U(t)}$ avec $U' = u$.

Racines d'une équation différentielle

Un résultat à savoir redémontrer

Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, et t_0 une racine de x. Il existe $\eta > 0$ tel que sur l'intervalle $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, t_0 est l'unique racine de x.

Racines d'une équation différentielle

Un résultat à savoir redémontrer

Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, et t_0 une racine de x. Il existe $\eta > 0$ tel que sur l'intervalle $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, t_0 est l'unique racine de x.

On raisonne par l'absurde : on suppose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left]t_0 - \dfrac{1}{n}, t_0 + \dfrac{1}{n}\right[$ contient une autre racine $t_n \neq t_0$.

Racines d'une équation différentielle

Un résultat à savoir redémontrer

Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, et t_0 une racine de x. Il existe $\eta > 0$ tel que sur l'intervalle $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, t_0 est l'unique racine de x.

On raisonne par l'absurde : on suppose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left]t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right[$ contient une autre racine $t_n \neq t_0$.

On a $\lim t_n = t_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0$ donc en passant à la limite : $x'(t_0) = 0$.

Racines d'une équation différentielle

Un résultat à savoir redémontrer

Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, et t_0 une racine de x. Il existe $\eta > 0$ tel que sur l'intervalle $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, t_0 est l'unique racine de x.

On raisonne par l'absurde : on suppose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left]t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right[$ contient une autre racine $t_n \neq t_0$.

On a $\lim t_n = t_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0$ donc en passant à la limite : $x'(t_0) = 0$.

x est l'unique solution vérifiant $x(t_0) = 0$ et $x'(t_0) = 0$ donc (Pb de Cauchy) $x = 0$, absurde.

Racines d'une équation différentielle

Un résultat à savoir redémontrer

Soit x une solution non identiquement nulle de $x'' = u(t)x' + v(t)x$, et t_0 une racine de x. Il existe $\eta > 0$ tel que sur l'intervalle $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, t_0 est l'unique racine de x.

On raisonne par l'absurde : on suppose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left]t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right[$ contient une autre racine $t_n \neq t_0$.

On a $\lim t_n = t_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0$ donc en passant à la limite : $x'(t_0) = 0$.

x est l'unique solution vérifiant $x(t_0) = 0$ et $x'(t_0) = 0$ donc (Pb de Cauchy) $x = 0$, absurde.

On dit que t_0 est une racine isolée de x. Cette notion permet de parler de racines consécutives d'une fonction (si elle en possède au moins deux).

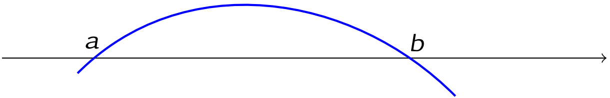
Entrelacement des racines

Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de $x'' + q(t)x = 0$. Montrer qu'entre deux racines consécutives de x_1 se trouve une racine de x_2.

Entrelacement des racines

Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de $x'' + q(t)x = 0$. Montrer qu'entre deux racines consécutives de x_1 se trouve une racine de x_2.

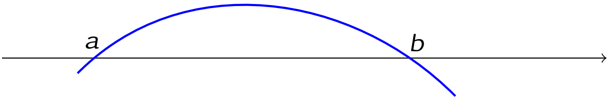
On suppose $x_1(a) = x_1(b) = 0$ et $\forall t \in]a, b[$, $x_1(t) > 0$ (quitte à considérer $-x_1$, qui est aussi solution).



Entrelacement des racines

Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de $x'' + q(t)x = 0$. Montrer qu'entre deux racines consécutives de x_1 se trouve une racine de x_2.

On suppose $x_1(a) = x_1(b) = 0$ et $\forall t \in]a, b[$, $x_1(t) > 0$ (quitte à considérer $-x_1$, qui est aussi solution).

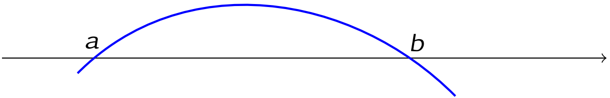


On a $x_1'(a) > 0$ et $x_1'(b) < 0$: $x_1'(a) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{x_1(a+t) - 0}{t} \geqslant 0$.

Entrelacement des racines

Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de $x'' + q(t)x = 0$. Montrer qu'entre deux racines consécutives de x_1 se trouve une racine de x_2.

On suppose $x_1(a) = x_1(b) = 0$ et $\forall t \in]a, b[$, $x_1(t) > 0$ (quitte à considérer $-x_1$, qui est aussi solution).



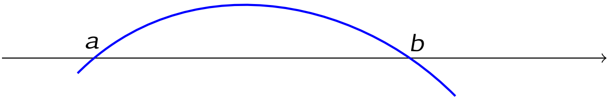
On a $x_1'(a) > 0$ et $x_1'(b) < 0$: $x_1'(a) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{x_1(a+t) - 0}{t} \geqslant 0$.

On suppose $\forall t \in]a, b[$, $x_2(t) > 0$ (quitte à considérer $-x_2$ qui est aussi solution) et on pose $w = x_1' x_2 - x_1 x_2'$.

Entrelacement des racines

Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de $x'' + q(t)x = 0$. Montrer qu'entre deux racines consécutives de x_1 se trouve une racine de x_2.

On suppose $x_1(a) = x_1(b) = 0$ et $\forall t \in]a, b[$, $x_1(t) > 0$ (quitte à considérer $-x_1$, qui est aussi solution).



On a $x_1'(a) > 0$ et $x_1'(b) < 0$: $x_1'(a) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{x_1(a+t) - 0}{t} \geqslant 0$.

On suppose $\forall t \in]a, b[$, $x_2(t) > 0$ (quitte à considérer $-x_2$ qui est aussi solution) et on pose $w = x_1' x_2 - x_1 x_2'$.

On calcule $w' = 0$ donc $w = \lambda$.
Or $w(a) = x'(a)x_2(a) \geqslant 0$ et $w(b) = x_1'(b)x_2(b) \leqslant 0$ donc $w = 0$ et (x_1, x_2) est lié, absurde.