Séries entières - Équa. diffs

Séries entières

Rayon de convergence

Il existe un réel $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$|z| < \mathrm{R} \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \quad \text{et} \quad |z| > \mathrm{R} \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement.}$$

Définitions d'Abel : $\mathrm{R} = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \;\middle|\; \text{la suite } (|a_n|\rho^n) \text{ est majorée}\right\} = \sup\left\{\rho \geqslant 0 \;\middle|\; \lim |a_n|\rho^n = 0\right\}$.
Lorsque c'est possible, on applique le critère de d'Alembert à la suite $u_n = a_n z^n$ pour calculer R.

Théorèmes de comparaison. Lorsque $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $\mathrm{R}_b \leqslant \mathrm{R}_a$; lorsque $a_n \sim b_n$, $\mathrm{R}_b = \mathrm{R}_a$.
La somme et le produit de deux séries entières possèdent un rayon de convergence au moins égal au minimum des deux rayons de convergence.
La dérivation formelle d'une série entière a même rayon de convergence que la série initiale.

Séries entières d'une variable réelle

La convergence d'une série entière est normale sur tout segment inclus de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$; en conséquence de quoi la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, et on peut dériver terme à terme.
Unicité du développement en série entière. Deux séries entières ont des sommes égales au voisinage de 0 ssi elles ont même coefficients.

Équations différentielles linéaires

Équations scalaires du premier ordre

Les solutions de $x' = u(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 1 : $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}$ avec $\mathrm{U}'(t) = u(t)$.
Les solutions de $x' = u(t)x + v(t)$ forment un espace affine de dimension 1 : $x(t) = (\mathrm{V}(t) + \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}$ avec $\mathrm{V}'(t) = v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)}$.
Problème de Cauchy. Pour toute condition initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$.

Systèmes différentiels

Les solutions dans $\mathbb{R}^n$ de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ forment un espace vectoriel de dimension n.
Les solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$ forment un espace affine de dimension n : $\mathrm{X}(t) = \mathrm{X}_{\text{part}}(t) + \widetilde{\mathrm{X}}(t)$ où $\widetilde{\mathrm{X}}$ est solution de $\widetilde{\mathrm{X}}' = \mathrm{A}(t)\widetilde{\mathrm{X}}$.
Problème de Cauchy. Pour toute condition initiale (t_0, X_0) il existe une unique solution vérifiant $\mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0$.

Équations scalaires du second ordre

Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x$ forment un espace vectoriel de dimension 2.
Les solutions de $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ forment un espace affine de dimension 2 : $x(t) = x_{\text{part}}(t) + \widetilde{x}(t)$ avec $\widetilde{x}'' = u(t)\widetilde{x}' + v(t)\widetilde{x}$.
Problème de Cauchy. Pour toute condition initiale (t_0, x_0, x_0') il existe une unique solution vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

Wronskien

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation homogène $x'' = u(t)x' + v(t)$, leur *wronskien* est la quantité $w = x_1' x_2 - x_1 x_2'$.
Alors w est solution de l'équation différentielle $w' = u(t)w$ et :

- si (x_1, x_2) est libre, w ne s'annule jamais ;
- si (x_1, x_2) est liée, w est la fonction nulle.