Interrogation sur les séries entières et les équations différentielles

Durée : libre

Exercice 1

(2 pts) On note R_p et R_i les rayons de convergence respectifs de $\sum a_{2n}z^n$ et de $\sum a_{2n+1}z^n$. Exprimer en fonction de R_p et R_i le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

Exercice 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

a) (1,5 pts) Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$.

b) (1,5 pts) Montrer que pour tout $\lambda > \frac{1}{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t}\, dt$ converge et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\lambda^{n+1}}$.

Exercice 3

a) (1 pt) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} z^n$ vaut $R = 1/4$.

b) (2 pts) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$ et en déduire $f(x)$.

Exercice 4

(2 pts) Soient a et b deux fonctions positives et intégrables définies sur $[0, +\infty[$.
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, positive, de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) \leqslant a(t) f(t) + b(t)$.
Montrer que f possède une limite finie en $+\infty$.

Exercice 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle (E) : $(t^2 - t)x'' + tx' - \alpha x = 0$.

a) (1,5 pts) Soit $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que x vérifie (E) si et seulement si :

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{(n^2 - \alpha)}{n(n+1)} a_n$$

b) (1 pt) En déduire les valeurs de α pour lesquelles (E) admet une solution polynomiale non nulle.

c) (1 pt) Les solutions de (E) sur $]0, 1[$ sont-elles toutes développables en série entière en 0 ? Justifier votre réponse.

Exercice 6

On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (E) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \int_0^x (x - t) f(t)\, dt$.

a) (1 pt) Montrer que si f vérifie (E) alors f est de classe $\mathscr{C}^2$.

b) (1,5 pts) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifie (E) si et seulement si $f'' = f$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. En déduire les solutions de (E).

Exercice 7

On considère deux fonction f et q continues sur $\mathbb{R}$, ainsi que les équations différentielles

$$(\mathrm{E}): \quad x'' + q(t)x = f(t) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{H}): \quad x'' + q(t)x = 0$$

On note S l'ensemble des solutions de (E) et $\mathrm{S_H}$ celui de (H).
On considère enfin deux réels $a < b$ ainsi que le sous-espace vectoriel V des fonctions $x \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $x(a) = x(b) = 0$.

a) (2 pts) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction nulle est l'unique solution de (H) appartenant à V ;

(ii) l'application $\phi : \mathrm{S_H} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x) = \big(x(a), x(b)\big)$ est bijective ;

(iii) l'application $\psi : \mathrm{S} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x) = \big(x(a), x(b)\big)$ est bijective.

b) (2 pts) On suppose dans cette question uniquement que $q(t) = \lambda$ constante.
Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles les propriétés du *a)* sont vérifiées.