Corrigé : interrogation sur les séries entières et les équations différentielles

Exercice 1

Si $0 \leqslant \rho < R$, la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée, il en est donc de même des sous-suites $(a_{2n}\rho^{2n})$ et $(a_{2n+1}\rho^{2n+1}) = \rho(a_{2n+1}\rho^{2n})$. On en déduit que $\rho^2 \leqslant R_p$ et $\rho^2 \leqslant R_i$ donc $\rho \leqslant \sqrt{\min(R_p, R_i)}$ et en faisant tendre ρ vers R : $R \leqslant \sqrt{\min(R_p, R_i)}$.

Réciproquement, si $\rho < \sqrt{\min(R_p, R_i)}$ alors $\rho^2 < R_p$ et $\rho^2 < R_i$ donc les suites $(a_{2n}\rho^{2n})$ et $(a_{2n+1}\rho^{2n})$ sont bornées, et il en est donc de même de la suite $(a_n\rho^n)$. On en déduit que $\rho \leqslant R$, puis que $\sqrt{\min(R_p, R_i)} \leqslant R$. D'où l'égalité $R = \sqrt{\min(R_p, R_i)}$.

Exercice 2

a) Soit $\rho \geqslant 0$ et $r \in]0, R[$. On a $\left|\dfrac{a_n}{n!}\rho^n\right| = \left|a_n r^n\right| \times \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n = 0$ (terme général d'une série convergente) donc la suite $\left(\dfrac{a_n}{n!}\rho^n\right)$ est bornée. ceci étant vrai pour tout $\rho \geqslant 0$, la série $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

b) Posons $f_n(t) = \dfrac{a_n}{n!} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}$ et appliquons le théorème d'interversion somme / intégrale.

- Les fonctions f_n sont toutes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est continue par morceaux ;
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{\lambda^{n+1}}$ (effectuer une changement de variable $u = \lambda t$ puis reconnaître une intégrale usuelle).

La série $\sum \dfrac{|a_n|}{\lambda^n}$ converge car $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| < R$ donc le théorème s'applique : la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\lambda^{n+1}}$.

Exercice 3

a) Posons $a_n = \dbinom{2n}{n}$. On calcule $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ donc $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = 4|z|$. D'après le critère de d'Alembert, $|z| < 1/4 \implies \sum a_n z^n$ converge absolument, et $|z| > 1/4 \implies \sum a_n z^n$ diverge, donc $R = 1/4$.

b) Pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\binom{2n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2(2n-1)\binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2n+1)\binom{2n}{n} x^n$.

Ainsi, $f'(x) = 4x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\binom{2n}{n}x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = 4xf'(x) + 2f(x)$ et f est solution de l'équation $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-4x}}$, avec $\lambda = f(0) = a_0 = 1$ donc $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Exercice 4

Notons g l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(0) = f(0) \end{cases}$.

La fonction $f - g$ vérifie : $\forall t \geqslant 0$, $(f-g)'(t) \leqslant a(t)(f-g)(t)$ donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{e}^{A(t)}\Big) \leqslant 0$, où A désigne une primitive de a.

La fonction $t \mapsto \big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{e}^{A(t)}$ décroit et s'annule en 0 donc pour tout $t \geqslant 0$, $\big(f(t) - g(t)\big)\mathrm{e}^{A(t)} \leqslant 0$, soit $f(t) \leqslant g(t)$.

On résout maintenant : on pose $A(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ et $B(t) = \displaystyle\int_0^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\,\mathrm{d}s$ et alors $g(t) = \big(f(0) + B(t)\big)\mathrm{e}^{A(t)}$.

a est intégrable donc A possède une limite en $+\infty$; a et b sont positives donc $0 \leqslant b(s)\mathrm{e}^{-A(s)} \leqslant b(s)$. Or b est intégrable donc $s \mapsto b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}$ aussi et B possède une limite en $+\infty$. On en déduit que g possède une limite en $+\infty$ et donc que f est majorée. Étant croissante, elle possède une limite finie en $+\infty$.

Exercice 5

a) x est solution de (E) sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n^2-\alpha)a_n - n(n+1)a_{n+1}\big)t^n = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, x est solution si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^2-\alpha)a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$, soit $a_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \dfrac{n^2-\alpha}{n(n+1)}a_n$.

b) Une fonction polynomiale est une fonction développable en série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang, donc (E) admet une solution polynomiale non nulle si et seulement s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = n^2$.

c) Considérons la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ où (a_n) est définie par la donnée de $a_1 = 1$ et de la relation $a_{n+1} = \dfrac{n^2-\alpha}{n(n+1)}a_n$. D'après le critère de d'Alembert le rayon de convergence est égal à 1 donc cette fonction est solution de (E) sur $]0,1[$. En outre, l'ensemble des solutions développables en série entière sur cet intervalle est la droite vectorielle engendrée par cette fonction. Mais l'ensemble des solutions sur $]0,1[$ forme un espace vectoriel de dimension 2, donc il existe sur cet intervalle des solutions qui ne sont pas développables en série entière.

Exercice 6

a) Soit f une solution de (E). On a $f(x) = x + x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$. f est continue donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, et la relation précédente montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Mais dans ce cas, ces mêmes fonctions sont de classe $\mathscr{C}^2$, et donc f aussi.

b) Toujours à l'aide du théorème fondamental de l'analyse, on a $f'(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $f''(x) = f(x)$ donc f est solution du problème de Cauchy $y'' = y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda+\mu = 0$ et $\lambda - \mu = 1$ soit $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$ donc $f(x) = \mathrm{sh}(x)$.

Exercice 7

a) Montrons que $(i) \implies (ii)$: $\mathrm{S_H}$ est un espace vectoriel de dimension 2 et ϕ est linéaire. On a $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{S_H} \cap \mathrm{V}$ donc d'après (i), ϕ est injective, et donc bijective puisque $\dim \mathrm{S_H} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.
Montrons que $(ii) \implies (iii)$. Attention : ici ψ n'est pas une application linéaire car S n'est pas un espace vectoriel.
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, et x_0 une solution quelconque de (E). Une solution $x \in \mathrm{S}$ s'écrit $x = x_0 + y$ avec $y \in \mathrm{S_H}$ donc $\begin{cases} x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} y(a) = \alpha - x_0(a) \\ y(b) = \beta - x_0(b) \end{cases}$, et ce dernier système possède une unique solution y d'après l'hypothèse (ii), donc (α,β) possède un unique antécédent par ψ, qui est donc bijective.
Montrons enfin que $(iii) \implies (i)$. Soit y une solution de (H) appartenant à V. Soit x_0 une solution quelconque de (E). $x_0 + y$ est solution de (E) et $\psi(x_0+y) = \psi(x_0)$ donc $x_0 + y = x_0$ puisque ψ est supposée bijective. On en déduit que $y = 0$.

b) On va chercher les valeurs de λ pour lesquelles (i) est vérifiée.

– Si $\lambda > 0$, on pose $\lambda = \omega^2$. les solutions de (H) s'écrivent $x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ et

$$x \in \mathrm{V} \iff \begin{pmatrix} \cos(\omega a) & \sin(\omega a) \\ \cos(\omega b) & \sin(\omega b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'inconnues (α,β) possède pour unique solution la fonction nulle si et seulement si $\begin{vmatrix} \cos(\omega a) & \sin(\omega a) \\ \cos(\omega b) & \sin(\omega b) \end{vmatrix} \neq 0$ soit $\sin\big(\omega(b-a)\big) \neq 0$. La propriété (i) est donc vérifiée lorsque $b \not\equiv a \bmod \dfrac{\pi}{\omega}$.

- Si $\lambda < 0$, on pose $\lambda = -\omega^2$. les solutions de (H) s'écrivent $x(t) = \alpha\,\mathrm{ch}(\omega t) + \beta\,\mathrm{sh}(\omega t)$ et

$$x \in \mathrm{V} \iff \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\omega a) & \mathrm{sh}(\omega a) \\ \mathrm{ch}(\omega b) & \mathrm{sh}(\omega b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Ce système d'inconnues (α, β) possède pour unique solution la fonction nulle si et seulement si $\begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\omega a) & \mathrm{sh}(\omega a) \\ \mathrm{ch}(\omega b) & \mathrm{sh}(\omega b) \end{vmatrix} \neq 0$ soit $\mathrm{sh}\Big(\omega(b-a)\Big) \neq 0$, ce qui est toujours le cas puisque $a < b$.

- Si $\lambda = 0$, les solution de (H) s'écrivent $x(t) = \alpha t + \beta$ et $x \in \mathrm{V} \iff \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, système qui admet la fonction nulle pour unique solution si et seulement si $a \neq b$, ce qui est toujours le cas.