Algèbre linéaire

Jean-Pierre Becirspahic
Lycée Marcelin Berthelot

Interprétation matricielle

Si (e) est une base de E, on associe à :

- un vecteur $x \in E$ le vecteur colonne

$$X = \mathrm{Mat}_{(e)}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

  de ses coordonnées ;
- une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs la matrice carrée

$$P = \mathrm{Mat}\,(e)(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;$$

- à un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ la matrice carrée

$$A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Si (e') est une nouvelle base de E et $P = \mathrm{Mat}_{(e)}(e'_1, \ldots, e'_n)$, on a

$$X' = P^{-1}X \quad \text{et} \quad A' = P^{-1}AP.$$

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ne pas utiliser la définition $A' = P^{-1}AP$ car les calculs sont inextricables.

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}^3$, (e) base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = A$.
Alors $u : X \mapsto AX$.

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}^3$, (e) base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = A$.
Alors $u : X \mapsto AX$.
On cherche une base (e') telle que

$$u(e'_1) = e'_1, \quad u(e'_2) = e'_1 + e'_2, \quad u(e'_3) = 2e'_3$$

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}^3$, (e) base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = A$.
Alors $u : X \mapsto AX$.
On cherche une base (e') telle que

$$u(e_1') = e_1', \quad u(e_2') = e_1' + e_2', \quad u(e_3') = 2e_3'$$

On résout $AX_1 = X_1$, par exemple $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}^3$, (e) base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = A$.
Alors $u : X \mapsto AX$.
On cherche une base (e') telle que

$$u(e_1') = e_1', \quad u(e_2') = e_1' + e_2', \quad u(e_3') = 2e_3'$$

On résout $AX_2 = X_1 + X_2$, par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}^3$, (e) base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = A$.
Alors $u : X \mapsto AX$.
On cherche une base (e') telle que

$$u(e'_1) = e'_1, \quad u(e'_2) = e'_1 + e'_2, \quad u(e'_3) = 2e'_3$$

On résout $AX_3 = 2X_3$, par exemple $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Interprétation matricielle

Un exercice pratique

Montrer que les matrices A et A' sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E = \mathbb{R}^3$, (e) base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = A$.
Alors $u : X \mapsto AX$.
On cherche une base (e') telle que

$$u(e'_1) = e'_1, \quad u(e'_2) = e'_1 + e'_2, \quad u(e'_3) = 2e'_3$$

On obtient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on a bien $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$, et $A' = P^{-1}AP$.

Interprétation matricielle

Un exercice théorique

Soient A et A' deux matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et A' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La formule $A' = P^{-1}AP$ peut servir dans un exercice théorique.

Interprétation matricielle

Un exercice théorique

Soient A et A' deux matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et A' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP \iff PA' = AP$.

Interprétation matricielle

Un exercice théorique

Soient A et A' deux matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et A' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP \iff PA' = AP$.

On pose $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $P_1A' = AP_1$ et $P_2A' = AP_2$.

Interprétation matricielle

Un exercice théorique

Soient A et A' deux matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et A' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP \iff PA' = AP$.

On pose $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $P_1A' = AP_1$ et $P_2A' = AP_2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(P_1 + tP_2)A' = A(P_1 + tP_2)$.

Interprétation matricielle

Un exercice théorique

Soient A et A' deux matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et A' sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP \iff PA' = AP$.

On pose $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $P_1A' = AP_1$ et $P_2A' = AP_2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(P_1 + tP_2)A' = A(P_1 + tP_2)$.
L'application $q : t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$ est polynomiale ; ce n'est pas le polynôme nul car $q(i) \neq 0$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(t) \neq 0$, et alors $P_1 + tP_2$ est inversible.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Pour tout $(\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{\alpha\beta}B = 0$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Pour tout $(\alpha, \beta) \in [\![1, n]\!]^2$, $AE_{\alpha\beta}B = 0$.

On pose $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. Alors $AE_{\alpha\beta} =$

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Pour tout $(\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{\alpha\beta}B = 0$.

On pose $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. Alors $AE_{\alpha\beta} = \sum_i a_{i\alpha}E_{i\beta}$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Pour tout $(\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{\alpha\beta}B = 0$.

On pose $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. Alors $AE_{\alpha\beta} = \sum_i a_{i\alpha}E_{i\beta}$.

On pose $B = \sum_{k,l} b_{kl}E_{kl}$. Alors $AE_{\alpha\beta}B =$

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Pour tout $(\alpha, \beta) \in [\![1, n]\!]^2$, $AE_{\alpha\beta}B = 0$.

On pose $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. Alors $AE_{\alpha\beta} = \sum_{i} a_{i\alpha}E_{i\beta}$.

On pose $B = \sum_{k,l} b_{kl}E_{kl}$. Alors $AE_{\alpha\beta}B = \sum_{i,l} a_{i\alpha}b_{\beta l}E_{il}$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i,j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Pour tout $(\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{\alpha\beta}B = 0$.

On pose $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. Alors $AE_{\alpha\beta} = \sum\limits_{i} a_{i\alpha}E_{i\beta}$.

On pose $B = \sum\limits_{k,l} b_{kl}E_{kl}$. Alors $AE_{\alpha\beta}B = \sum\limits_{i,l} a_{i\alpha}b_{\beta l}E_{il}$.

(E_{il}) est une famille libre donc pour tout (i,l), pour tout (α,β), $a_{i\alpha}b_{\beta l} = 0$.
Si $A \neq 0$, il existe (i,α) tel que $a_{i\alpha} \neq 0$ et alors pour tout (β,l), $b_{\beta l} = 0$, et $B = 0$.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Comment montrer que u est un projecteur ?

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Comment montrer que u est un projecteur ?

- $u \circ u = u$;

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Comment montrer que u est un projecteur ?

- $u \circ u = u$;
- $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Comment montrer que u est un projecteur ?

- $u \circ u = u$;
- $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$.

On sait déjà (ou on redémontre) que la somme $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$ est directe.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u + v = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Comment montrer que u est un projecteur ?

- $u \circ u = u$;
- $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$.

On sait déjà (ou on redémontre) que la somme $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$ est directe.
$\dim\Big(\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)\Big) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v) = 2n - \operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \geqslant n$ donc $\dim\Big(\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)\Big) = n$ et $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$.

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, $\mathrm{tr}(X) = 0$ et $X^T + X = 0$ donc $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$.

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, $\mathrm{tr}(X) = 0$ et $X^T + X = 0$ donc $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $X^T + X = \mathrm{tr}(X)A^T$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$.

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, $\mathrm{tr}(X) = 0$ et $X^T + X = 0$ donc $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $X^T + X = \mathrm{tr}(X)A^T$.

- Si $A^T \neq A$, $\mathrm{tr}(X) = 0$ et $X^T + X = 0$ donc $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ donc $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$; on peut donc définir

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$$

où (e) est une base quelconque de E.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$.

- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, $\mathrm{tr}(X) = 0$ et $X^T + X = 0$ donc $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Si X est solution, alors $X^T + X = \mathrm{tr}(X)A^T$.

- Si $A^T \neq A$, $\mathrm{tr}(X) = 0$ et $X^T + X = 0$ donc $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Si $A^T = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 2$, on pose $X = Y + Z$ avec $Y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $X + X^T = 2Y$ donc $Y = \lambda A$ et Z est quelconque.

Théorème du rang

Si H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, l'application $x \mapsto u(x)$ réalise un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im} u$, avec pour conséquence :

$$\dim E - \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u).$$

Théorème du rang

Si H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, l'application $x \mapsto u(x)$ réalise un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im} u$, avec pour conséquence :

$$\dim E - \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u).$$

Conséquence : Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, identifiée à $u : X \mapsto AX$ pour les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
On note $(e_1, \cdots, e_r)$ base d'un supplémentaire H de $\operatorname{Ker} A$, $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ base de $\operatorname{Ker} A$.
On pose $f_1 = u(e_1) = Ae_1, \dots, f_r = u(e_r) = Ae_r$. Alors $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\operatorname{Im} A$, qu'on complète pour former une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F.

Soit $P = \operatorname{Mat}_{\text{can}}(e)$, $Q = \operatorname{Mat}_{\text{can}}(f)$. Alors $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

remarque : r est le rang de A.

Théorème du rang

Une illustration de cette décomposition de A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang r. On pose $\mathcal{H} = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, ABA = 0\right\}$.
Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner sa dimension.

Théorème du rang

Une illustration de cette décomposition de A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang r. On pose $\mathcal{H} = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; ABA = 0\right\}$.
Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner sa dimension.

On pose $A = Q\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$ et $B = P\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}Q^{-1}$.

Théorème du rang

Une illustration de cette décomposition de A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang r. On pose $\mathcal{H} = \left\{ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, ABA = 0 \right\}$.
Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner sa dimension.

On pose $A = Q \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$ et $B = P \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} Q^{-1}$.

Alors $ABA = Q \begin{pmatrix} X & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $B \in \mathcal{H} \iff X = O$.

Théorème du rang

Une illustration de cette décomposition de A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang r. On pose $\mathcal{H} = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; ABA = 0\right\}$.
Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner sa dimension.

On pose $A = Q\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$ et $B = P\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}Q^{-1}$.

Alors $ABA = Q\begin{pmatrix} X & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$ donc $B \in \mathcal{H} \iff X = O$.

Ainsi, $\dim \mathcal{H} = n^2 - r^2$.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

La relation $u \circ u^2 = 0$ prouve $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

La relation $u \circ u^2 = 0$ prouve $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

On applique le théorème du rang à $v : \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\, u & \to & E \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

La relation $u \circ u^2 = 0$ prouve $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

On applique le théorème du rang à $v : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}\, u & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right)$.

$\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Im}(u^2)$ donc

$$\dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}(u^2)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u^2)$$

$$\iff 2n \leqslant n + \dim(\mathrm{Im}\, u^2) \iff \dim(\mathrm{Im}\, u^2) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u).$$

On en déduit $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$. On prouve de même que $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de H et on pose $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ et $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) = (u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de H et on pose $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ et $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) = (u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$.

u^2 réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}(u^2)$ donc $(u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$ est libre.

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de H et on pose $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ et $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) = (u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$.
u^2 réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}(u^2)$ donc $(u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$ est libre.

$$\sum \alpha_1 e_i + \sum \beta_i u(e_i) + \sum \gamma_i u^2(e_i) = 0 \overset{u^2}{\Longrightarrow} \sum \alpha_i u^2(e_i) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0.$$

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de H et on pose $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ et $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) = (u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$.

u^2 réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}(u^2)$ donc $(u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$ est libre.

$$\sum \alpha_1 e_i + \sum \beta_i u(e_i) + \sum \gamma_i u^2(e_i) = 0 \overset{u^2}{\Longrightarrow} \sum \alpha_i u^2(e_i) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0.$$

$$\sum \beta_i u(e_i) + \sum \gamma_i u^2(e_i) = 0 \overset{u}{\Longrightarrow} \sum \beta_i u^2(e_i) = 0 \Longrightarrow \beta_i = 0.$$

Théorème du rang

Une utilisation fine du théorème du rang

On suppose $\dim E = 3n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = 0$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.
- En déduire l'existence d'une base telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & O & O \\ I & O & O \\ O & I & O \end{pmatrix}$.

Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de H et on pose $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ et $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) = (u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$.

u^2 réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}(u^2)$ donc $(u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$ est libre.

$$\sum \alpha_1 e_i + \sum \beta_i u(e_i) + \sum \gamma_i u^2(e_i) = 0 \overset{u^2}{\Longrightarrow} \sum \alpha_i u^2(e_i) = 0 \implies \alpha_i = 0.$$
$$\sum \beta_i u(e_i) + \sum \gamma_i u^2(e_i) = 0 \overset{u}{\Longrightarrow} \sum \beta_i u^2(e_i) = 0 \implies \beta_i = 0.$$
$\sum \gamma_i u^2(e_i) = 0 \implies \gamma_i = 0$. On a bien défini une base.

Endomorphismes nilpotents

u est nilpotent d'indice p lorsque $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Si x est un vecteur tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, avec pour conséquence que $p \leqslant n = \dim E$.

Endomorphismes nilpotents

u est nilpotent d'indice p lorsque $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Si x est un vecteur tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, avec pour conséquence que $p \leqslant n = \dim E$.

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0 \overset{u^{p-1}}{\Longrightarrow} \alpha_0 u^{p-1}(x) = 0_E \Longrightarrow \alpha_0 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0 \overset{u^{p-2}}{\Longrightarrow} \alpha_1 u^{p-1}(x) = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = 0.$
- $\displaystyle\sum_{i=2}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0 \overset{u^{p-3}}{\Longrightarrow} \alpha_2 u^{p-1}(x) = 0_E \Longrightarrow \alpha_2 = 0.$ etc.

Endomorphismes nilpotents

u est nilpotent d'indice p lorsque $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Si x est un vecteur tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, avec pour conséquence que $p \leqslant n = \dim E$.

Cas particulier : si u est nilpotent d'indice $n = \dim E$, cette famille est une base pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Endomorphismes nilpotents

Une autre caractérisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Endomorphismes nilpotents

Une autre caractérisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

- Si A est nilpotente, alors $AX = \lambda X \implies A^n X = \lambda^n X \implies \lambda^n X = 0$. Si X est un vecteur propre, $X \neq 0$ et donc $\lambda = 0$.

Endomorphismes nilpotents

Une autre caractérisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

- Si A est nilpotente, alors $AX = \lambda X \implies A^n X = \lambda^n X \implies \lambda^n X = 0$. Si X est un vecteur propre, $X \neq 0$ et donc $\lambda = 0$.
- Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T à diagonale nulle :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Endomorphismes nilpotents

Une autre caractérisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

- Si A est nilpotente, alors $AX = \lambda X \implies A^n X = \lambda^n X \implies \lambda^n X = 0$. Si X est un vecteur propre, $X \neq 0$ et donc $\lambda = 0$.
- Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T à diagonale nulle :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si $T = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ on a $u(e_1) = 0$ et $u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$ donc :

$$u(e_1) = 0, \quad u^2(e_2) = 0, \quad \cdots \quad u^n(e_n) = 0$$

donc $T^n = 0$.