Algèbre linéaire

Interprétation matricielle

Si (e) est une base de E, on associe à :

- un vecteur $x \in \mathrm{E}$ le vecteur colonne $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{(e)}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de ses coordonnées ;
- une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs la matrice carrée $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}\,(e)(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- à un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ la matrice carrée $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(e)}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si (e') est une nouvelle base de E et $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{(e)}(e'_1, \dots, e'_n)$, on a $\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i, j) égal à 1. Alors $\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathrm{E}_{il}$.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\,p$.

Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$; on peut donc définir $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{(e)}(u))$ où (e) est une base quelconque de E.

Théorème du rang

Si H est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$, l'application $(x \mapsto u(x))$ réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}\,u$, avec pour conséquence : $\dim \mathrm{E} - \dim(\mathrm{Ker}\,u) = \dim(\mathrm{Im}\,u)$.

Endomorphismes nilpotents

u est nilpotent d'indice p lorsque $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Si x est un vecteur tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, avec pour conséquence que $p \leqslant n = \dim \mathrm{E}$.

En outre, si u est nilpotent d'indice $n = \dim \mathrm{E}$, cette famille est une base pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.