Interrogation d'algèbre linéaire

Durée : environ une heure

Exercice 1

a) (1 pt) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,A, \mathrm{rg}\,B)$.

b) (1,5 pt) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\mathrm{rg}\,M \leqslant 1$;

(*ii*) il existe deux vecteurs X et Y de $\mathbb{K}^n$ tels que $M = XY^T$.

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{GL}_{n-p}(\mathbb{K})$ inversible.

a) (1,5 pt) Comparer $\dim(\mathrm{Ker}\,M)$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,A)$.

b) (1 pt) En déduire que $\mathrm{rg}\,M = \mathrm{rg}\,A + \mathrm{rg}\,B$.

Exercice 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On pose $n = \dim E$ et $r = \mathrm{rg}\,u$.

a) (1 pt) Comparer pour l'inclusion $\mathrm{Im}\,u$ et $\mathrm{Ker}\,u$, et en déduire que $2r \leqslant n$.

b) (2 pts) On considère un supplémentaire H de $\mathrm{Ker}\,u$, et $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H. Justifier l'existence d'une base $(b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_{n-r}, e_1, \ldots, e_r)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} O & I_r \\ O & O \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u et v dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose $u + v = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v = n$.

a) (1,5 pts) Que vaut $\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$? En déduire que $\mathrm{Im}\,u \oplus \mathrm{Im}\,v = E$.

b) (1 pt) Montrer que $\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Im}\,v$. En déduire que $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Im}\,v$ et $\mathrm{Ker}\,v = \mathrm{Im}\,u$.

c) (1,5 pt) Montrer que u est la projection sur $\mathrm{Im}\,u$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,v$.

Exercice 5

a) (1 pt) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$. Montrer que $BA = I_n$.

b) (1 pt) On suppose $n < p$. Expliciter deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$ et $BA \neq I_p$.

c) (1 pt) Est-ce possible dans le cas où $n > p$?

Exercice 6

(2 pt) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que deux des assertions suivantes impliquent la troisième :

(i) $A^2 = A$;

(ii) $\mathrm{rg}\,A = 1$;

(iii) $\mathrm{tr}\,A = 1$.

Exercice 7

Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

a) (2 pts) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A = I_n + CL$ soit inversible.

b) (1 pt) Calculer alors son inverse.