Corrigé : interrogation d'algèbre linéaire

Exercice 1

On identifie une matrice M avec l'application linéaire $X \mapsto MX$ de $\mathbb{K}^n$, ce qui permet de parler d'image et noyau de matrice.

a) On a $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}\, A$ donc $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}\, A$. On a $\mathrm{Ker}\, B \subset \mathrm{Ker}(AB)$ donc $n - \mathrm{rg}\, B \leqslant n - \mathrm{rg}(AB)$. D'où $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

b) Si $M = XY^T$, d'après la question précédente, $\mathrm{rg}\, M \leqslant \min(\mathrm{rg}\, X, \mathrm{rg}\, Y^T) \leqslant 1$.

Si $\mathrm{rg}\, M \leqslant 1$ toutes les colonnes de M sont colinéaires à un même vecteur X, donc $M = \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_n X \end{pmatrix} = XY^T$.

Exercice 2

a) Posons $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Alors $MZ = 0 \iff \begin{cases} AX + CY = 0 \\ BY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} AX = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ car B est inversible. Ainsi, $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ réalise un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Ker}\, M$, et $\dim(\mathrm{Ker}\, M) = \dim(\mathrm{Ker}\, A)$.

b) D'après le théorème du rang, $n - \mathrm{rg}\, M = p - \mathrm{rg}\, A$, soit $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, A + (n-p) = \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B$ car B est inversible.

Exercice 3

a) On a $u \circ u = 0 \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$ donc (théorème du rang) $r \leqslant n - r$, soit $2r \leqslant n$.

b) On pose $b_1 = u(e_1), \dots, b_r = u(e_r)$. D'après le théorème du rang, $(b_1, \dots, b_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, que l'on complète pour former une base $(b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_{n-r})$ de $\mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 4

a) On a $E = \mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$ donc $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = E$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim E = \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) = \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, v) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) = n - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$ donc $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0\}$ et ainsi $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v$.

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$. On a $x = u(x) + v(x)$ et $u(x) = 0$ donc $x = v(x) \in \mathrm{Im}\, v$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, v$. Mais d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Im}\, v)$ donc $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, v$. De manière symétrique, $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}\, u$.

c) On a $u \circ v = 0$ donc $u = u \circ \mathrm{Id} = u \circ (u+v) = u \circ u$, ce qui prouve que u est un projecteur. Il s'agit donc de la projection sur $\mathrm{Im}\, u$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, v$.

Exercice 5

a) Si $AB = I_n$, $\det A \times \det B = 1$, ce qui prouve que A est inversible. En multipliant à gauche par A^{-1} on obtient $B = A^{-1}$ et donc $BA = A^{-1}A = I_n$.

b) On définit A et B par blocs en posant $A = \begin{pmatrix} I_n & O \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}$. Alors $AB = I_n$ et $BA = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

c) On a $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$ (cf exercice 1) donc $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(n,p) = p < n$ donc on ne peut avoir $AB = I_n$.

Exercice 6

- On suppose (i) et (ii).
  Si $\mathrm{rg}\, A = 1$, en choisissant une base adaptée à $\mathrm{Ker}\, A$, A est semblable à une matrice $B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
  On calcule $B^2 = a_1 B$ donc $a_1 = 1$ et $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B = a_1 = 1$.
- On suppose (ii) et (iii).
  A est toujours semblable à B, et $a_1 = tr B = \mathrm{tr}\, A = 1$ donc $B^2 = B$, ce qui équivaut à $A^2 = A$.
- On suppose (iii) et (i).
  Si $A^2 = A$ alors A est la matrice d'une projection vectorielle, donc semblable à $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, avec $r = \mathrm{rg}\, A$. Mais dans ce cas $\mathrm{tr}\, A = r$ donc $r = 1$.

Exercice 7

Commencez par observer que CL est une matrice $n \times n$, mais LC est une matrice 1×1, *autrement dit un scalaire*.

a) A n'est pas inversible si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = 0$, soit $C(LX) = -X$.
Mais LX est une matrice 1×1 donc un scalaire. On a donc nécessairement $X \in \mathrm{Vect}(C)$, et ainsi, A n'est pas inversible si et seulement si $C \neq 0$ et $C(LC) = -C$, soit $LC = -1$.
Par contraposée, A est inversible si et seulement si $LC \neq -1$.

b) On calcule $A^2 = I + 2CL + C(LC)L = I + (2+\alpha)CL$ avec $\alpha = LC \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq -1$.
Ainsi, $A^2 - (2+\alpha)A + (1+\alpha)I = 0$, soit encore : $A\Big((2+\alpha)I - A\Big) = (1+\alpha)I$.
On en déduit que $A^{-1} = \dfrac{1}{1+\alpha}\Big((2+\alpha)I - A\Big) = I - \dfrac{1}{1+\alpha}CL$.