# Théorèmes d'Abel et de Tauber

Durée : libre

Dans tout le problème, on considère une série entière $\sum a_n x^n$ à coefficients réels et de rayon de convergence 1. Pour tout $x \in [0,1[$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Le but de ce problème est d'établir quelques résultats liant la convergence de la série numérique $\sum a_n$ et l'existence de la limite $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. Les trois parties sont indépendantes.

## Partie I. Le théorème d'Abel

Dans toute cette partie, on suppose la convergence de la série $\sum a_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

**Question 1.** Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}_k (x^{k+1} - x^k) + \mathrm{R}_n x^{n+1}$.

**Question 2.** En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leqslant 2 \sup_{k \geqslant n} \left| \mathrm{R}_k \right|$.

**Question 3.** En conclure que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$, puis que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

## Partie II. Une forme faible du théorème de Tauber

Dans toute cette partie, on suppose l'existence d'un réel $\lambda$ tel que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lambda$. *On suppose de plus que* $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Question 4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_n = \left| \lambda - \sum_{k=0}^{n} a_k \right|$. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\delta_n \leqslant \left| \lambda - f(x) \right| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

**Question 5.** Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence de $\mathrm{M}_n = \sup_{k \geqslant n} |k a_k|$, et montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = 0$.

**Question 6.** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n \leqslant \left| \lambda - f(x) \right| + (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\mathrm{M}_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$$

**Question 7.** On pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (1 - x_n) \sum_{k=0}^{n} k|a_k|$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_n^k$.

**Question 8.** En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lambda$.

## Partie III. Relations de comparaison

Dans cette partie, on considère une série entière $\sum b_n x^n$ *à coefficients positifs*, de rayon de convergence égal à 1, telle que $\sum b_n$ diverge. Pour tout $x \in [0,1[$ on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

**Question 9.** Montrer que $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.

**Question 10.** Soit $\epsilon > 0$. On suppose dans cette question uniquement qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $|a_n| \leqslant \epsilon b_n$. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |a_n| + \epsilon g(x)$

**Question 11.**

*a)* On suppose $a_n = \mathrm{o}(b_n)$. Montrer que lorsque $x$ tend vers $1^-$, $f(x) \underset{1^-}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$.

*b)* On suppose $a_n \sim b_n$. Montrer que lorsque $x$ tend vers $1^-$, $f(x) \underset{1^-}{\sim} g(x)$.

**Question 12.** *Application*. On suppose dans cette question que $\lim a_n = \ell$. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{=} \frac{\ell}{1-x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

**Question 13.** *Application*. On suppose dans cette question que $a_0 = 0$ et $a_n = \ln(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

*a)* Vérifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est bien égal à 1.

*b)* On pose $b_0 = 0$ et $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

*c)* En déduire que $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.