Corrigé : théorèmes d'Abel et de Tauber

Partie I. Le théorème d'Abel

Question 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \mathrm{R}_{k-1} - \mathrm{R}_k$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (\mathrm{R}_{k-1} - \mathrm{R}_k) x^k = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{R}_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}_k x^k = \mathrm{R}_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}_k (x^{k+1} - x^k)$$

Question 2. On en déduit :

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\Big| \leqslant |\mathrm{R}_n| x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\mathrm{R}_k|(x^k - x^{k+1}) \leqslant \sup_{k\geqslant n} |\mathrm{R}_k| \Big(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}(x^k - x^{k+1})\Big) \leqslant \sup_{k\geqslant n}|\mathrm{R}_k|\Big(x^{n+1} + x^{n+1}\Big) \leqslant 2 \sup_{k\geqslant n} |\mathrm{R}_k|$$

Question 3. Introduisons la fonction reste $\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$. D'après ce qui précède, $\|\mathrm{T}_n\|_\infty \leqslant 2 \sup_{k\geqslant n} |\mathrm{R}_k|$ et $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} |\mathrm{R}_k| = 0$ donc la suite (T_n) converge uniformément vers 0, ce qui prouve la convergence uniforme due $\sum a_n x^n$ sur $[0,1]$.
Chacune des fonctions $x \mapsto a_n x^n$ étant continue sur $[0,1]$ il en est donc de même de leur somme f, et ainsi, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Partie II. Une forme faible du théorème de Tauber

Question 4. $\lambda - \sum_{k=0}^{n} a_k = \lambda - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$ donc :

$$|\delta_n| \leqslant \big|\lambda - f(x)\big| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

Question 5. Par hypothèse, $\lim k a_k = 0$ donc la suite $(k a_k)$ est bornée, ce qui donne un sens à M_n. De plus, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|k a_k| \leqslant \epsilon$, ce qui implique $\mathrm{M}_n \leqslant \epsilon$. On retrouve là la définition de la convergence de (M_n) vers 0.

Question 6. Pour tout $x \in [0,1[$, $\dfrac{1-x^k}{1-x} = \sum_{i=0}^{k-1} x^i \leqslant k$ donc $(1 - x^k) \leqslant k(1-x)$. De plus, pour tout $k \geqslant n$, $|a_k| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_n}{k} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_n}{n}$ donc

$$\delta_n \leqslant \big|\lambda - f(x)\big| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\mathrm{M}_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$$

Question 7. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel $k|a_k| \leqslant \epsilon$, donc pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k|a_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k|a_k| + (n - \mathrm{N} + 1)\epsilon$.
Ainsi, $(1 - x_n) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| \leqslant \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k|a_k| + \dfrac{n - \mathrm{N} + 1}{n}\epsilon = \alpha_n$.
On a $\lim \alpha_n = \epsilon$ donc il existe un rang $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ à partir duquel $\alpha_n \leqslant 2\epsilon$. Ainsi, on a prouvé que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N' à partir duquel $(1 - x_n)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| \leqslant 2\epsilon$, soit $\lim_{n\to+\infty} (1 - x_n) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| = 0$.
$\dfrac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_n^k = \dfrac{x_n^{n+1}}{n(1 - x_n)} = x_n^{n+1} = \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_n^k = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Question 8. Ajoutons que par caractérisations séquentielle, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lambda$. Ainsi, si on applique l'inégalité obtenue à la question 6 au réel x_n, les trois termes du majorant tendent vers 0 (puisque $\lim \mathrm{M}_n = 0$). Ceci prouve que $\lim \delta_n = 0$, autrement dit que $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lambda$.

Partie III. Relations de comparaison

Question 9. Soit $M > 0$. La série positive $\sum b_n$ diverge donc il existe un entier n tel que $\sum_{k=0}^{n} b_k \geqslant M + 1$.

$\lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \geqslant M + 1$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$, $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \geqslant M$.

Mais $g(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ (car (b_n) est positive), donc on a prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$, $g(x) \geqslant M$. Autrement dit, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.

Question 10. $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \epsilon b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon b_n x^n = \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \epsilon g(x)$ puisque (b_n) est à valeurs positives.

Question 11.

a) Si $a_n = o(b_n)$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|a_n| \leqslant \epsilon b_n$. La question précédente s'applique donc : $|f(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \epsilon g(x)$. On a donc $\frac{|f(x)|}{g(x)} \leqslant \epsilon + \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N} |a_n|$.

Mais $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$, $\frac{|f(x)|}{g(x)} \leqslant 2\epsilon$.

On a donc prouvé que $\lim_{x\to 1^-} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$, soit $f(x) \underset{1^-}{=} o(g(x))$.

b) Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n - b_n = o(b_n)$ donc d'après la question 11a, $f(x) - g(x) \underset{1^-}{=} o(g(x))$, soit $f(x) \underset{1^-}{\sim} g(x)$.

Question 12. On pose $b_n = 1$. $a_n - \ell = o(1)$ donc d'après 11a, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \ell) x^n \underset{1^-}{=} o\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$, soit $f(x) \underset{1^-}{=} \frac{\ell}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Question 13.

a) pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\frac{\ln(n+1)x^{n+1}}{\ln(n)x^n}\right| = \left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)|x|$ donc $\lim \left|\frac{\ln(n+1)x^{n+1}}{\ln(n)x^n}\right| = |x|$. D'après le critère de d'Alembert, $R = 1$.

b) On reconnait un produit de Cauchy : $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

c) On sait que $a_n \sim b_n$ donc d'après la question 11b, $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.