

Suites et séries de fonctions

Principe du recouvrement

Si f est continue (respectivement dérivable ou de classe \mathcal{C}^p) sur tout segment de I alors f est continue (respectivement dérivable ou de classe \mathcal{C}^p) sur I .

Suites de fonctions

- (f_n) converge *simplement* vers f sur I lorsque pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.
- (f_n) converge *uniformément* vers f sur I lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0$. La CVU entraîne la CVS.

Continuité, dérivabilité

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si (f_n) converge uniformément vers f sur I alors f est continue sur I .
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en un point a adhérent à I et si (f_n) converge uniformément vers f sur I alors (ℓ_n) converge et $\lim_a f(x) = \lim \ell_n$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I , si (f_n) converge simplement vers f sur I et si (f'_n) converge uniformément vers g sur I alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

Intégration

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue et si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.
- **Théorème de convergence dominée.** On suppose que :
 - (i) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;
 - (ii) il existe une fonction ϕ intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq \phi(t)$.

Alors f est intégrable sur I et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$.

Séries de fonctions

- $\sum f_n$ converge *simplement* sur I lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- $\sum f_n$ converge *absolument* sur I lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.
- $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I lorsque $\sum f_n$ converge simplement et $\lim \|R_n\|_{\infty, I} = 0$.
- $\sum f_n$ converge *normalement* sur I lorsque la série $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$ converge.

Continuité, dérivabilité

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur I , la somme S est continue sur I .
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en un point a adhérent à I et si $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I alors $\sum \ell_n$ converge et $\lim_a S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I , si $\sum f_n$ converge simplement sur I et si $\sum f'_n$ converge uniformément sur I alors la somme S est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^p sur I , si pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I et si $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I alors la somme S est de classe \mathcal{C}^p sur I et $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Intégration

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue et si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$.
- **Théorème d'interversion somme / intégrale.** On suppose que :
 - (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I;
 - (ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I;
 - (iii) la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors la somme S est intégrable sur I et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$.

- **Méthode alternative.** On applique le théorème de convergence dominée à la suite des restes (R_n) :

On écrit $\int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_I f_k(t) dt + \int_I R_n(t) dt$ et on fait tendre n vers $+\infty$.