Interrogation sur les suites et séries de fonctions

Durée : libre

Exercice 1

a) (0,5 pt) Justifier l'existence pour $x \geqslant 0$ de $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$.

b) (1 pt) Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.

c) (0,5 pt) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 2

On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

a) (1,5 pts) Montrer que $\mathrm{S} = \displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.

b) (1 pt) En déduire à l'aide d'une intégration par parties que $\mathrm{S} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

Exercice 3

On rappelle que pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) (1 pt) Justifier pour tout $x > 1$ l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

b) (2 pts) Montrer que pour tout $x > 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)\zeta(x)$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$.

a) (0,5 pt) Montrer que pour tout $x > 0$, la série définissant $f(x)$ est bien convergente.

b) (1,5 pts) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

c) (2 pts) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on note $f_n : x \mapsto \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x+k}\right)$ et $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a) (1,5 pts) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Préciser la monotonie de S sur $]0, +\infty[$.

b) (1 pt) Montrer que pour $x > 0$ on a $x\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(x+1) = 1$.

c) (1,5 pts) Déduire des deux questions précédentes un équivalent de S en 0 et en $+\infty$.

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ on pose $g_n(x) = (1-x)^n f(x)$.

a) (1,5 pts) Dans cette question uniquement on suppose $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

On revient désormais au cas général.

b) (2 pts) On suppose que $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,1]$. Montrer que $f(0) = 0$ et que $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge. En déduire que $f'(0) = 0$.

c) (1 pt) Réciproquement, on suppose désormais $f(0) = f'(0) = 0$. Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}x^2$. En utilisant la question 6a, que peut-on en déduire quant à la série de fonctions $\sum g_n$?