

CORRIGÉ : INTERROGATION SUR LES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1

a) Posons $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}$. Pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument, ce qui assure l'existence de $S(x)$.

b) Soit $\alpha > 0$. $\forall x \in [0, \alpha]$, $|f_n(x)| \leq \frac{\alpha}{n^2}$ donc $\|f_n\|_{\infty, [0, \alpha]} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Les fonctions f_n sont continues et la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, \alpha]$ donc S est continue sur $[0, \alpha]$, puis par recouvrement sur \mathbb{R}_+ .

c) $S(x+1) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n} \right)$. Or par télescopage $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1+N}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$: $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$.

Exercice 2

a) Pour tout $t \in [0, 1[$, $\arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$. Notons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, 1[$ (car continues sur $[0, 1]$); $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et la somme est continue par morceaux. Enfin, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge.

Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le théorème d'interversion somme / intégrale :

$$\int_0^1 \arctan t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Exercice 3

a) Soit $x > 1$ fixé. Au voisinage de 0, $\frac{t^{x-1}}{e^t-1} \underset{0}{\sim} t^{x-2}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{2-x}} dt$ converge car $2-x < 1$, donc $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt$ converge.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{t^{x-1}}{e^t-1} \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt$ converge.

b) Pour tout $t > 0$, $\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ donc $\frac{t^{x-1}}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = t^{x-1} e^{-nt}$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, +\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(x)}{n^x}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge donc le théorème d'interversion somme / intégrale s'applique : $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x)\zeta(x)$.

Exercice 4

a) Soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{n(1+nx)}$. Soit $x > 0$ fixé. Au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

b) Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 , et $f_n'(x) = \frac{-1}{(1+nx)^2}$.

Soit $\alpha > 0$. Sur $[\alpha, +\infty[$, $\|f_n'\|_{\infty} = \frac{1}{(1+n\alpha)^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La convergence est normale donc uniforme sur $[\alpha, +\infty[$ donc le théorème de dérivation s'applique : f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$, donc sur \mathbb{R}_+ par recouvrement.

c) Pour tout $x > 0$, $xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1/x+n)} = g\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(y)$ et $g_n(y) = \frac{1}{n(y+n)}$.

Sur $[0, +\infty[$, $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc la convergence de $\sum g_n$ est normale, et donc uniforme sur $[0, +\infty[$. Les fonctions g_n étant continues, il en est de même de g , et ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

Exercice 5

a) Soit $\alpha > 0$. Les fonctions f_n sont continues sur cet intervalle, et $\|f_n\|_\infty = f_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha n!}$. La série $\sum \frac{1}{n!}$ converge donc la convergence est normale, donc uniforme sur $[\alpha, +\infty[$. On en déduit que S est continue sur $[\alpha, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$ par recouvrement. De plus, chacune des fonctions f_n est décroissante, donc S est décroissante sur cet intervalle.

b) On a $f_n(x+1) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x+k} = x f_{n+1}(x)$ donc $S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} x f_{n+1}(x) = x(S(x) - f_0(x)) = xS(x) - 1$.

c) S est continue en 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e-1$ et d'après la question précédente, $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{e}{x}$.

S est décroissante et positive donc $0 \leq S(x+1) \leq S(x)$, soit encore $0 \leq xS(x) - 1 \leq S(x)$. Cette double inégalité s'écrit encore $\frac{1}{x} \leq S(x) \leq \frac{1}{x-1}$, et donc $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Exercice 6

a) On calcule $g'_n(x) = (1-x)^{n-1} x^{\alpha-1} (\alpha - (n+\alpha)x)$. D'où les variations :

x	0	$\frac{\alpha}{n+\alpha}$	1
$g_n(x)$	0		0

On en déduit $\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^n \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n+\alpha}\right)\right) \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha \sim \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha}$ et $\sum \|g_n\|_\infty$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) $\sum \|g_n\|_\infty$ converge donc $\lim \|g_n\|_\infty = 0$. Or $|f(0)| = |g_n(0)| \leq \|g_n\|_\infty$ donc $f(0) = 0$.

$|g_n\left(\frac{1}{n}\right)| \leq \|g_n\|_\infty$ donc $\sum g_n\left(\frac{1}{n}\right)$ converge absolument. Or $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{e} f\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ converge absolument.

Si $f'(0) \neq 0$ on a $f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f'(0)}{n}$. Mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $f'(0) = 0$.

c) D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq Mx^2$ avec $M = \frac{\|f''\|_\infty}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, $|g_n(x)| \leq M(1-x)^n x^2 = h_n(x)$, et $\|g_n\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty$. Mais d'après 6a, la série $\sum h_n$ converge normalement sur $[0, 1]$; il en est donc de même de $\sum g_n$.