révision

Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Étudier la convergence simple puis uniforme de $f_n : x \mapsto \sin x (\cos x)^n$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)$.
Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Sur quels intervalles la convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3

Soit $k > 0$ et (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes qui converge simplement vers f sur I.

a. Montrer que f est k-lipschitzienne sur I.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I. ***Indication***. *Utiliser une subdivision de pas suffisamment petit de* $[a, b]$.

Exercice 4

Soit $\gamma \in [0, 1[$. On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ en posant $u_0 : x \mapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b. En déduire la convergence simple de la suite (u_n) sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que la limite simple de (u_n) est une fonction u dérivable, non nulle, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = u(\gamma x)$.

Exercice 5

On pose $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

a. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c. La fonction S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2 x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n + x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Déterminer un équivalent de f en 0^+. **Indication**. Approcher f par $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ au voisinage de 0^+.

d. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n>1}$ une suite à valeurs strictement positive. On définit $\mathcal{D}_u = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum u_n n^\alpha \text{ converge}\right\}$.

a. Montrer que si $\beta \in \mathcal{D}_u$ alors $]-\infty, \beta] \subset \mathcal{D}_u$.

b. Montrer que $\mathcal{D}_u$ vérifie l'une des assertions suivantes :

$$(i) \quad \mathcal{D}_u = \varnothing \qquad (ii) \quad \mathcal{D}_u = \mathbb{R} \qquad (iii) \quad \mathcal{D}_u =]-\infty, \gamma[\text{ où } \gamma \in \mathbb{R} \qquad (iv) \quad \mathcal{D}_u =]-\infty, \gamma] \text{ où } \gamma \in \mathbb{R}$$

c. Donner des exemples pour les quatre cas.

On suppose que $\mathcal{D}_u$ est de la forme $]-\infty, \gamma[$ et on définit ϕ sur $\mathcal{D}_u$ par $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n n^x$.

d. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

e. Calculer la limite de $\phi(x)$ lorsque x tend vers γ par valeurs inférieures.