corrigé

Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Étudier la convergence simple puis uniforme de $f_n : x \mapsto \sin x (\cos x)^n$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \in [0, 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$. On en déduit que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_n'(x) = (\cos x)^{n+1} - n(\sin x)^2(\cos x)^{n-1} = (\cos x)^{n-1}\left(\cos^2 x - n\sin^2 x\right)$.

Posons $x_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Les variations de f_n sont données par :

x	0	x_n	$\pi/2$
$f_n(x)$	0 $\nearrow$		$\searrow$ 0

On en déduit que sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \dfrac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{1+1/n}}\left(\dfrac{1}{1+1/n}\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \sim \dfrac{1}{e\sqrt{n}}$.

On a $\lim \|f_n\|_\infty = 0$, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \exp\left(\dfrac{(n-1)x}{n}\right)$.

Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Sur quels intervalles la convergence est-elle uniforme ?

Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$; si $x = 0$, $f_n(0) = 1$ donc (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Étudions la fonction $f - f_n : x \mapsto e^x(1 - e^{x/n})$. On a $(f - f_n)'(x) = e^x\left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)e^{x/n}\right)$, d'où les variations :

x	$-\infty$	x_n	0	$+\infty$
$(f - f_n)(x)$	0 $\nearrow$		$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

avec $x_n = -n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

$(f - f_n)(x_n) = \dfrac{e^{x_n}}{n+1}$; $\lim x_n = -1$ donc $\lim \dfrac{e^{x_n}}{n+1} = 0$.

Sur des intervalles du type $]-\infty, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ on a $\|f - f_n\|_\infty = \max\left(\dfrac{e^{x_n}}{n+1}, (f_n - f)(\alpha)\right)$. Sachant que $\lim \dfrac{e^{x_n}}{n+1} = 0$ et $\lim f_n(\alpha) = f(\alpha)$ on en déduit que $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$; la convergence est uniforme sur tout intervalle de type $]-\infty, \alpha]$, mais pas sur $\mathbb{R}$ puisque $f_n - f$ n'est pas bornée.

Exercice 3

Soit $k > 0$ et (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes qui converge simplement vers f sur I.

a. Montrer que f est k-lipschitzienne sur I.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I. ***Indication***. *Utiliser une subdivision de pas suffisamment petit de* $[a, b]$.

a. Fixons deux réels x et y dans I. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(y) - f_n(x)| \leqslant k[y - x|$ et en passant à la limite, puisque la convergence est simple, $|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$ donc f est k-lipschitzienne.

b. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I, $\epsilon > 0$ et $(x_0 = a, \dots, x_p = b)$ une subdivision de pas inférieur ou égal à ϵ (autrement dit, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $0 \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant \epsilon$).
Traduisons la convergence simple en x_i : il existe un rang N_i à partir duquel $|f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \epsilon$ et posons $\mathrm{N} = \max_i \mathrm{N}_i$.
Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $i \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad |f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leqslant k|x - x_i| + \epsilon + k|x_i - x| \leqslant (2k+1)\epsilon \end{aligned}$$

Nous avons montré que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leqslant (2k+1)\epsilon$; la convergence est uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 4

Soit $\gamma \in [0, 1[$. On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ en posant $u_0 : x \mapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b. En déduire la convergence simple de la suite (u_n) sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que la limite simple de (u_n) est une fonction u dérivable, non nulle, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = u(\gamma x)$.

a. Raisonnons par récurrence sur n :

- si $n = 0$, $u_1(x) = 1 + x$ donc $u_1(x) - u_0(x) = x$ et on a bien $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{x^1}{1!}$.
- Si $n > 0$, supposons que pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n(t) - u_{n-1}(t) \leqslant \dfrac{t^n}{n!}$. On a $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \int_0^x \big(u_n(\gamma t) - u_{n-1}(\gamma t)\big)\mathrm{d}t$

  donc : $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(\gamma t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \gamma^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et la récurrence se propage.

b. Fixons $x \geqslant 0$. La série $\sum \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge donc il en est de même de la série $\sum \big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big)$. Par télescopage on en déduit que la suite $(u_n(x))$ converge.

c. Par télescopage toujours, $u(x) - u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \big(u_{k+1}(x) - u_k(x)\big)$ donc $0 \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$.

Soit $\alpha > 0$; sur $[0, \alpha]$ on a $\|u - u_n\|_\infty \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}$. Ce majorant est le reste d'une série convergente, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u - u_n\|_\infty = 0$: la convergence est uniforme sur tout segment $[0, \alpha]$. Ceci prouve que u est continue sur tout $[0, \alpha]$, donc sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour $x > 0$ la convergence uniforme sur $[0, x]$ nous permet d'appliquer le théorème d'intégration des suites de fonctions : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence on obtient : $u(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$, et le théorème fondamental de l'analyse permet de conclure : u est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \geqslant 0$, $u'(x) = u(\gamma x)$.

Exercice 5

On pose $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

a. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c. La fonction S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

a. Notons $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2+n^4x^2}$. Ces fonctions sont continue sur $\mathbb{R}$ et $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ donc la convergence de $\sum f_n$ est normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$. On en déduit que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. On applique le théorème d'interversion somme / intégrale :

– les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

– la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme S est continue par morceaux ;

– $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n^3}\arctan(nx)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n^3}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge.

On en déduit que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{-2x}{(1+n^2x^2)^2}$.

Soit $0 < \alpha < \beta$. Sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$, $\|f_n'\|_\infty \leqslant \dfrac{2\beta}{(1+n^2\alpha^2)^2}$ donc $\|f_n'\|_\infty = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. La convergence de $\sum f_n'$ est normale donc uniforme sur $[\alpha,\beta]$; d'après le théorème de dérivation S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, puis par recouvrement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction S est paire, donc S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Pour étudier la dérivabilité en 0, on s'intéresse au taux d'accroissement $\dfrac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$.

On encadre par des intégrales : Pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leqslant \frac{x}{1+n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$ donc :

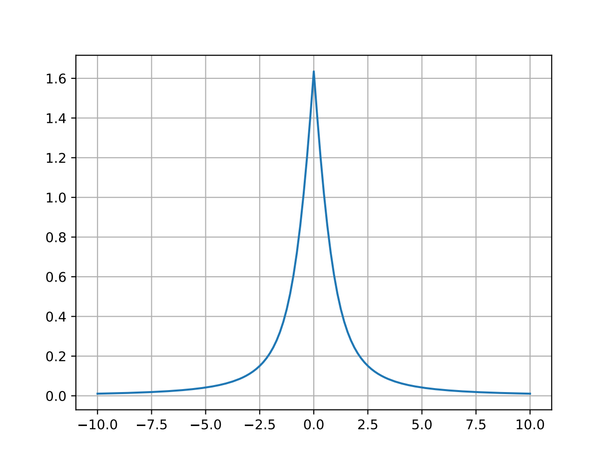
$$\forall x>0,\quad -\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leqslant \frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \leqslant -\int_1^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \quad\text{soit}\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} \leqslant -\frac{\pi}{2}+\arctan x$$

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} = -\frac{\pi}{2}$. Mais S étant paire, ceci implique $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(0)}{x} = \frac{\pi}{2}$.
La fonction S n'est donc pas dérivable en 0, mais possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 0.
En prime, le graphe de la fonction S, pour visualiser l'allure au voisinage de 0 :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def S(x):
    s = 0
    for n in range(1, 101):
        s += 1 / (n**2 + n**4 * x**2)
    return s

X = np.linspace(-10, 10, 129)
Y = [S(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
plt.grid()
plt.show()
```



Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

a. Posons $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ la suite $(|f_n(x)|)$ décroit et tend vers 0 donc le critère spécial relatif aux séries alternées s'applique : $f(x)$ est bien défini. Pour $x = 0$, $f_n(0) = (-1)^n$ ne tend pas vers 0 donc $f(0)$ n'est pas défini. On en déduit que f est définie (et paire) sur $\mathbb{R}^*$.

b. Toujours d'après le critère spécial, le reste $\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+k^2x^2}$ vérifie : $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2x^2}$ donc sur un intervalle $[\alpha,+\infty[$, $\alpha > 0$, on a $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2\alpha^2}$ et $\lim \|\mathrm{R}_n\|_\infty = 0$: la convergence est uniforme sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$. Les fonctions f_n étant continues, S est continue sur chacun de ces intervalles, puis par recouvrement sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On a $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+n^2t^2} = \left[\frac{1}{n}\arctan(nt)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n}$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc le théorème d'interversion somme / intégrale ne peut s'appliquer. On choisit donc de suivre la démarche alternative : $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \mathrm{R}_n(x)$.

Chacune des fonctions f_k est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt = (-1)^k \frac{\pi}{2k}$.

$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \phi(x)$. La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il en est de même de R_n, et le théorème de convergence dominée montre que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{R}_n(t)\,dt = 0$.

f est intégrable comme somme finie de fonctions intégrables, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\pi}{2k} + \int_0^{+\infty} \mathrm{R}_n(t)\,dt$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi}{2k} = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est continue sur D.

c. Déterminer un équivalent de f en 0^+. **Indication**. Approcher f par $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ au voisinage de 0^+.

d. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

a. Posons $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n+x}$. Si $x > 0$ on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(e^{-nx})$. La série $\sum e^{-nx}$ converge donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\sum f_n(x)$ diverge. f est donc définie sur $\mathrm{D} =]0,+\infty[$.

b. Sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$, $\|f_n\| = \frac{e^{-n\alpha}}{n+\alpha} = \mathrm{O}(e^{-n\alpha})$ (car f_n est décroissante comme produit de deux fonctions positives et décroissantes) donc la convergence est normale, et donc uniforme sur $[\alpha,+\infty[$. Chacune des fonctions f_n étant continue,

f est continue sur tout $[\alpha,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par recouvrement.

c. $g(x)-f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}$ donc $|g(x)-f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}x$. Ainsi, $f(x)\underset{0}{=}g(x)+\mathrm{O}(x)$.

Par ailleurs, le développement en série entière de $t\mapsto\ln(1-t)$ nous permet d'observer que pour tout $x>0$, $g(x)=-\ln(1-\mathrm{e}^{-x})\underset{0}{=}-\ln(x+\mathrm{o}(x))\underset{0}{=}-\ln x-\ln(1+\mathrm{o}(1))\underset{0}{=}-\ln x+\mathrm{o}(1)$. Ainsi, $f(x)\underset{0}{=}-\ln x+\mathrm{o}(1)$ et $f(x)\underset{0}{\sim}-\ln x$.

d. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}$ donc $(1+x)\mathrm{e}^x f(x)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+x}{n+x}\mathrm{e}^{-(n-1)x}$.

On a $0\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+x}{n+x}\mathrm{e}^{-(n-1)x}\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n-1)x}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+x}{n+x}\mathrm{e}^{-(n-1)x}=0$.

On en déduit que $\lim_{+\infty}(1+x)\mathrm{e}^x f(x)=1$ donc que $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\geqslant1}$ une suite à valeurs strictement positive. On définit $\mathcal{D}_u=\left\{\alpha\in\mathbb{R}\;\middle|\;\sum u_n n^\alpha \text{ converge}\right\}$.

a. Montrer que si $\beta\in\mathcal{D}_u$ alors $]-\infty,\beta]\subset\mathcal{D}_u$.

b. Montrer que $\mathcal{D}_u$ vérifie l'une des assertions suivantes :

$$(i)\quad \mathcal{D}_u=\varnothing\qquad (ii)\quad \mathcal{D}_u=\mathbb{R}\qquad (iii)\quad \mathcal{D}_u=]-\infty,\gamma[\text{ où }\gamma\in\mathbb{R}\qquad (iv)\quad \mathcal{D}_u=]-\infty,\gamma]\text{ où }\gamma\in\mathbb{R}$$

c. Donner des exemples pour les quatre cas.

On suppose que $\mathcal{D}_u$ est de la forme $]-\infty,\gamma[$ et on définit ϕ sur $\mathcal{D}_u$ par $\phi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n n^x$.

d. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

e. Calculer la limite de $\phi(x)$ lorsque x tend vers γ par valeurs inférieures.

a. Si $\alpha<\beta$ alors $0\leqslant u_n n^\alpha\leqslant u_n n^\beta$ donc $\sum u_n n^\beta$ converge $\Longrightarrow\sum u_n n^\alpha$ converge.

b. Supposons $\mathcal{D}_u$ différent de $\varnothing$ et de $\mathbb{R}$. il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha\notin\mathcal{D}_u$, et d'après la question précédente, α majore $\mathcal{D}_u$. Cet ensemble est non vide et majoré : il possède une borne supérieure γ, et $\mathcal{D}_u\subset]-\infty,\gamma]$.

Soit maintenant $\alpha<\gamma$. α ne majore pas $\mathcal{D}_u$ donc il existe $\beta\in\mathcal{D}_u$ tel que $\alpha<\beta$, et d'après la question précédente, $\alpha\in\mathcal{D}_u$. On a donc prouvé que $]-\infty,\gamma[\subset\mathcal{D}_u\subset]-\infty,\gamma]$, ce qui correspond aux cas (iii) et (iv).

c. Pour $u_n=n!$, $\mathcal{D}_u=\varnothing$ (critère de d'Alembert). Pour $u_n=\frac{1}{n!}$, $\mathcal{D}_u=\mathbb{R}$ (toujours d'après le critère de d'Alembert). Pour $u_n=1$, $\mathcal{D}_u=]-\infty,-1[$ (série de Riemann). Enfin, pour $u_n=\frac{1}{(\ln n)^2}$, $\mathcal{D}_u=]-\infty,-1]$ (série de Bertrand).

d. Notons $f_n : x\mapsto u_n n^x$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n^{(k)}(x)=(\ln n)^k u_n n^x$. Soit $\beta<\gamma$. Sur l'intervalle $]-\infty,\beta]$, $\|f_n^{(k)}\|_\infty=(\ln n)^k u_n n^\beta=\mathrm{O}(u_n n^\delta)$ avec $\beta<\delta<\gamma$. Puisque $\delta\in\mathcal{D}_u$ on en déduit que la convergence de $\sum f_n^{(k)}$ est normale, donc uniforme sur $]-\infty,\beta]$. Ceci montre que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,\beta]$, puis par recouvrement sur $\mathcal{D}_u$.

e. La fonction ϕ est croissante, donc ϕ possède une limite, finie ou infinie, en γ. Supposons cette limite ℓ finie.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in\mathcal{D}_u$, $\sum_{k=1}^{n}u_k k^x\leqslant\phi(x)\leqslant\ell$. En faisant tendre x vers γ on obtient : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}u_k k^\gamma\leqslant\ell$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n n^\gamma$ sont majorées donc la série converge, ce qui signifie que $\gamma\in\mathcal{D}_u$, ce qui est absurde. On en déduit que $\lim_\gamma\phi(x)=+\infty$.