Corrigé : interrogation sur les séries numériques

Exercice 1

$\ln(\mathrm{P}_n) = \sum_{k=0}^{n} (1-a_k)$. La série $\sum a_n$ converge donc $\lim a_n = 0$ et ainsi, $\ln(1-a_k) \sim -a_k$.
La série *positive* $\sum a_k$ converge donc il en est de même de la série négative $\sum \ln(1-a_k)$; on note $\ell < 0$ sa somme. On en déduit que la suite $\big(\ln(\mathrm{P}_n)\big)$ converge vers $\mathrm{e}^{\ell} \in]0,1[$.

Exercice 2

a) Si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ on a $\frac{1}{n} = \mathrm{O}(a_n)$ donc la série positive $\sum a_n$ diverge. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, soit β un réel tel que $\frac{1}{2} < \beta < \alpha$. Alors $a_n = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{2\beta}}\Big)$ avec $2\beta > 1$ donc la série $\sum a_n$ converge.

b) $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ donc $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n^{\alpha}} - \frac{1}{2} v_n$ avec $v_n \sim a_n$. La série $(-1)^n \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ converge d'après le critère spécial relatif aux séries alternées, donc les séries $\sum u_n$ et sum v_n ont même nature, et d'après la question précédente, $\sum v_n$ converge si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 3

a) La suite (R_n) décroit et tend vers 0, donc d'après le critère spécial relatif aux séries alternées, la série $\sum (-1)^n \mathrm{R}n$ converge.

b) On a $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$ donc $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, soit $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
Ainsi, $\mathrm{R}_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ et $\sum \mathrm{R}_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 4

a) $\sum |u_n|$ converge donc $\lim u_n = 0$ et donc $u_n^2 = \mathrm{O}(|u_n|)$. On en dédut que la série positive $\sum u_n^2$ converge.

b) Si $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ converge (critère spécial relatif aux séries alternées) mais $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{|u_n|}{n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n^2 \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^2}}$. Les séries $\sum u_n^2$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc les sommes partielles de la série positive $\sum \frac{|u_n|}{n}$ sont majorées et la série converge.

Exercice 5

(A_n) est bornée donc $|\mathrm{A}_n(u_n - u_{n+1})| = \mathrm{O}\big(|u_n - u_{n+1}|\big)$.
(u_n) est décroissante, donc $|u_n - u_{n+1}| = u_n - u_{n+1}$. Or d'après le théorème de la limite monotone la suite (u_n) converge, donc par télescopage la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge. On en déduit que la série $\sum \mathrm{A}_n(u_n - u_{n+1})$ converge absolument, donc converge.

Exercice 6

Pour tout $t \in [u_n, u_{n+1}]$ on a $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{u_n}$ donc $\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{u_n} = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.
$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{u_0}^{u_{\mathrm{N}+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(u_{\mathrm{N}+1}) - \ln(u_0)$. Or $\lim u_{\mathrm{N}+1} = +\infty$ donc la série $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge ; il en est donc de même de la série $\sum \Big(\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\Big)$.

Exercice 7

Pour tout $n \geqslant 1$, $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant k|u_n - u_{n-1}|$ donc on prouve par récurrence sur n que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|$. La série $\sum k^n$ converge donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge. Par télescopage on en déduit que la suite (u_n) converge.

Exercice 8

a) Soit $g : x \mapsto f(x) - f(x+1)$. On a $g'(x) = f'(x) - f'(x+1) \leqslant 0$ car f' est croissante, donc g est décroissante. De plus, $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 0$. On en déduit que la suite $\big(f(n) - f(n+1)\big)$ décroit et tend vers 0.

b) $\mathrm{R}_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k) = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k+1} f(k+1)$ donc $\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \big(f(k) - f(k+1)\big)$. La question précédente montre que la série $\sum(-1)^n\big(f(n) - f(n+1)\big)$ vérifie les hypothèses du critère spécial, donc $|\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1}| \leqslant f(n) - f(n+1)$.
$\lim\limits_{+\infty} f(n) = 0$ donc par télescopage la série $\sum\big(f(n) - f(n+1)\big)$ converge ; on en déduit que la série $\sum(\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1})$ converge absolument donc converge.

c) $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{R}_n = 0$ donc par télescopage la série $\sum(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1})$ converge. La somme de deux séries convergentes est convergente et $\mathrm{R}_n = \dfrac{(\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}) + (\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1})}{2}$ donc la série $\sum \mathrm{R}_n$ converge.