révision

Suites et séries numériques

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1}$.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\right)^\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 3

Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ pour $\alpha>0$?

Exercice 4

a. On considère deux suites positives (u_n) et (v_n) telles que $u_n\sim v_n$ et $\sum u_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

b. Montrer que la suite $(\mathrm{H}_n - \ln n)$ converge ; on note γ sa limite.

c. On pose $t_n = \mathrm{H}_n - \ln n - \gamma$. Donner un équivalent de $t_{n+1}-t_n$, et en déduire un équivalent de t_n.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite positive et décroissante, telle que la série $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. **Indication**. Considérer $\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n$ pour montrer tout d'abord que $\lim nu_{2n}=0$.

b. Démontrer que la série $\sum k(u_k-u_{k+1})$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs, et $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

a. Dans cette question uniquement on suppose $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Donner une expressions simple de v_n, puis prouver que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

b. Dans le cas général, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$ et en déduire que la série $\sum v_n$ converge et que sa somme S vérifie $0\leqslant \mathrm{S}\leqslant 1$.

c. On pose $w_n = \dfrac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$. En s'intéressant à la suite $\ln(w_n)$ montrer que la série $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\mathrm{S}=1$.

Exercice 7

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.

Justifier l'existence de R_n, puis étudier la convergence de la série $\sum \mathrm{R}_n$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$ converge.
Indication. Utiliser une transformation d'Abel.