corrigé

Suites et séries numériques

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1}$.

$$u_n = n^{3/2}\Big(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\Big)^{1/2} - n^{3/2}\Big(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\Big)^{1/2} = n^{3/2}\Big(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big) - n^{3/2}\Big(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big)$$

$= \dfrac{1}{n^{3/2}} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{5/2}}\Big)$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum u_n$ converge.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\right)^{\alpha}$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Il est légitime de tenter d'appliquer le critère de d'Alembert, mais malheureusement $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, ce qui ne permet pas de conclure.
On cherche donc un équivalent en exprimant u_n à l'aide de factorielles, puis en utilisant la formule de Stirling : $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^{\alpha}$ donc $u_n \sim \left(\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{4^n(2\pi n)n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}\right)^{\alpha} = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi n})^{\alpha}} = \dfrac{1}{(\pi n)^{\alpha/2}}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 3

Nature de la série de terme général $u_n = \ln\Big(1+\sin\Big(\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\Big)\Big)$ pour $\alpha > 0$?

$\sin\Big(\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\Big) = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\Big)$ donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}} - \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\Big) = v_n + w_n$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ et $w_n \sim -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$.
La série $\sum v_n$ converge d'après le critère spécial, et $\sum w_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ car w_n est de signe constant à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

a. On considère deux suites positives (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

b. Montrer que la suite $(\mathrm{H}_n - \ln n)$ converge ; on note γ sa limite.

c. On pose $t_n = \mathrm{H}_n - \ln n - \gamma$. Donner un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, et en déduire un équivalent de t_n.

a. D'après le théorème d'équivalence on sait déjà que $\sum v_n$ converge.
Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $(1-\epsilon)u_k \leqslant v_k \leqslant (1+\epsilon)u_k$.
Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. En sommant ces inégalités on obtient $(1-\epsilon)\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leqslant (1+\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, ce qui traduit l'équivalence demandée.

b. On pose $u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$. Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\Big(1-\dfrac{1}{n+1}\Big) = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument donc converge ; par télescopage on en déduit que la suite (u_n) converge.

c. On a déjà calculé $t_{n+1} - t_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\Big(1-\dfrac{1}{n+1}\Big) \sim \dfrac{-1}{2(n+1)^2} \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1}-t_k) \sim -\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2k^2}$. Or $\lim t_n = 0$ donc par télescopage $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1}-t_k) = -t_n$ et par comparaison à une intégrale, $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$. On en déduit que $t_n \sim \dfrac{1}{2n}$, donc que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite positive et décroissante, telle que la série $\sum u_n$ converge.

a. Montrer que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. **Indication**. Considérer $\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n$ pour montrer tout d'abord que $\lim nu_{2n} = 0$.

b. Démontrer que la série $\sum k(u_k - u_{k+1})$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

a. On a $\displaystyle \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = nu_{2n} \geqslant 0$. Or $\lim(\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n) = 0$ car $\sum u_n$ converge, donc par encadrement $\lim nu_{2n} = 0$, puis $\lim 2nu_{2n} = 0$.

Par ailleurs, $0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n}(2nu_{2n})$ donc par encadrement $\lim(2n+1)u_{2n+1} = 0$ et on peut conclure : $\lim nu_n = 0$.

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1}$.

D'après la question précédente, $\lim nu_{n+1} = \lim(n+1)u_{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1})$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs, et $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

a. Dans cette question uniquement on suppose $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Donner une expressions simple de v_n, puis prouver que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

b. Dans le cas général, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$ et en déduire que la série $\sum v_n$ converge et que sa somme S vérifie $0 \leqslant \mathrm{S} \leqslant 1$.

c. On pose $w_n = \dfrac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$. En s'intéressant à la suite $\ln(w_n)$ montrer que la série $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\mathrm{S} = 1$.

a. $1 + u_k = \dfrac{k+2}{k+1}$ donc par télescopage, $(1+u_0)\cdots(1+u_n) = (n+2)$ et $v_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

On a $v_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum v_n$ converge, et par télescopage $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = 1$.

b. On montre par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - w_n$, avec $w_n = \dfrac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$.

- Si $n = 0$ on a $v_0 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = 1 - \dfrac{1}{1+u_0} = 1 - w_0$.
- Si $n \geqslant 1$, on suppose $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = 1 - w_{n-1}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - w_{n-1} + u_n w_n = 1 - (1+u_n)w_n + u_n w_n = 1 - w_n$ donc la

récurrence se propage.

De ceci il résulte que la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est majorée par 1. S'agissant d'une suite croissante ($v_n \geqslant 0$) on en déduit sa convergence vers une limite $\mathrm{S} \leqslant 1$.

c. On a $\ln(w_n) = -\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$.

Le point incontournable à connaître ici est que lorsque (u_n) est à valeurs positives, les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature. En effet :

- si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$ donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$, et la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge ;
- réciproquement, si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge alors $\lim \ln(1+u_n) = 0$ donc (en passant à l'exponentielle) $\lim u_n = 0$. Ainsi, $u_n \sim \ln(1+u_n)$ et la série $\sum u_n$ converge.

On en déduit que si la série $\sum u_n$ converge, la suite $\ln(w_n)$ converge vers une limite ℓ, et donc que (w_n) converge vers $\mathrm{e}^{\ell} > 0$. D'après la question précédente, $\mathrm{S} = 1 - \mathrm{e}^{\ell} < 1$.

En revanche, si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum \ln(1+u_n)$ diverge et s'agissant d'une série positive, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = +\infty$. On en déduit que $\lim \ln(w_n) = -\infty$ donc $\lim w_n = 0$ et d'après la question précédente, $\mathrm{S} = 1$.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Justifier l'existence de R_n, puis étudier la convergence de la série $\sum \mathrm{R}_n$.

L'existence de R_n relève du critère spécial relatif aux séries alternées. Nous allons prouver la convergence de $\sum \mathrm{R}_n$ en appliquant ce même critère spécial.

Nous savons déjà que $\lim \mathrm{R}_n = 0$ et que R_n est du signe de son premier terme, à savoir $(-1)^{n+1}$. La série $\sum \mathrm{R}_n$ est donc bien alternée, et pour appliquer le critère il reste à prouver que la suite $(|\mathrm{R}_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\begin{aligned}|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| &= (-1)^{n+1}\mathrm{R}_n - (-1)^{n+2}\mathrm{R}_{n+1} = (-1)^{n+1}(\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n+1}) = (-1)^{n+1}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\Big)\\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}\end{aligned}$$

Toujours d'après le critère spécial, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ est du signe de son premier terme, à savoir $(-1)^{n+1}$, donc $|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| \geqslant 0$.

Toutes les hypothèses du critère spécial sont réunies, la série $\sum \mathrm{R}_n$ converge.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Indication. Utiliser une transformation d'Abel.

On note (S_n) la suite des sommes partielles ; alors $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{S}_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{S}_k}{k+1} = \frac{\mathrm{S}_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)} - \mathrm{S}_0$$

La suite (S_n) converge donc $\lim \frac{\mathrm{S}_n}{n} = 0$. Elle est aussi bornée donc $\frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$, ce qui assure la convergence absolue de $\sum \frac{S_k}{k(k+1)}$. L'égalité ci-dessus prouve donc que la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{u_n}{n}$ possède une limite, donc que la série converge.