Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables

Si H est un sous-espace vectoriel stable par u et (e) une base adaptée à H, alors $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{O} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(e_{\mathrm{H}})}(u_{\mathrm{H}})$.

Si $\mathrm{E} = \bigoplus \mathrm{H}_i$ où les H_i sont stables par u, alors dans une base (e) adaptée à cette décomposition,

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}_i = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(u_{\mathrm{H}_i}).$$

Polynôme caractéristique

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\chi_u(x) = \det(x\mathrm{Id} - u) = x^n - (\operatorname{tr} u)x^{n-1} + \cdots ? \cdots + (-1)^n \det u$.
Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u ; si n_λ est l'ordre de multiplicité de λ alors $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})) \leqslant n_\lambda$.

Lorsque $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ est scindé (**toujours vrai lorsque** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $\operatorname{tr} u = \sum_i \lambda_i$ et $\det u = \prod_i \lambda_i$.

Diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réalisée :

- il existe une base (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale ;
- il existe une base (e) formée de vecteurs propres de u ;
- $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$;
- χ_u est scindé et pour toute valeur propre, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})) = n_\lambda$;
- il existe un polynôme P *scindé à racines simples* tel que $\mathrm{P}(u) = 0$.

Théorème de Cayley-Hamilton : χ_u est un polynôme annulateur de u.

Commutant d'un endormorphisme diagonalisable

Si u est diagonalisable, $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ commute avec u si et seulement si chacun des sous-espaces propres de u est stable par v.

Dans ce cas, dans une base adaptée on a $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \mathrm{I}} & & \\ & \boxed{\lambda_2 \mathrm{I}} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k \mathrm{I}} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1} & & \\ & \boxed{\mathrm{A}_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathrm{A}_k} \end{pmatrix}$.

Cas particulier : lorsque u est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont simples, v est diagonalisable dans une même base que u.

Trigonalisation

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (**toujours vrai lorsque** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Lorsque $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est triangulaire, les valeurs propres apparaissent sur la diagonale avec leur multiplicité.