Interrogation sur la réduction des endomorphismes

Durée : libre

Exercice 1

(1 pt) Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\operatorname{tr} A = 0$.

Exercice 2

(1,5 pts) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$.
Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ si et seulement si u n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

(1,5 pts) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice sans valeur propre réelle. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 4

(1,5 pts) Soit $A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
Montrer que si B est diagonalisable, il en est de même de A.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

a) (1,5 pts) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.

b) (1 pt) En déduire que u est nilpotent.

Indication. *Considérer l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(w) = w \circ v - v \circ w$.*

Exercice 6

Soit $n \geqslant 2$ et $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \hline b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$. On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$.

a) (1,5 pts) Montrer que $\chi_M(x) = x^n - \lambda x^{n-2}$.

b) (2 pts) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que M soit diagonalisable.

Exercice 7

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension 3, et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_u(x) = (x-\lambda)^2(x-\mu)$, avec $\lambda \neq \mu$.

a) (1 pt) Montrer l'existence d'une base (e_1, e_2, e_3) telle que $\operatorname{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b) (1 pt) En déduire que $(u - \lambda \mathrm{Id})^2$ est de rang 1.

c) (1 pt) Montrer que $\operatorname{Ker}\big((u - \lambda \mathrm{Id})^2\big)$ est un plan stable par u.

d) (1,5 pts) **Difficile**. On suppose de plus u non diagonalisable.
Montrer l'existence d'une base $(e') = (e_1, e_2, e_3')$ telle que $\operatorname{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) (1 pt) Montrer que u admet au moins une droite stable par u.

b) (1,5 pts) On suppose u diagonalisable et on considère une base (e) de vecteurs propres de u.
Montrer que tout sous-espace F de E possède un supplémentaire G stable par u.

Indication. *Utiliser le théorème de la base incomplète.*

c) (1,5 pts) **Difficile**. On suppose que dans E, tout sous-espace vectoriel stable par u possède un supplémentaire stable par u. Montrer que u est diagonalisable.