

CORRIGÉ : INTERROGATION SUR LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Exercice 1

Si $A^2 = A$, A est la matrice d'une projection vectorielle donc est semblable à une matrice de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad \text{avec } r = \text{rg } A$$

Ainsi, $\text{tr } A = \text{tr } A' = r = \text{rg } A$ donc $r = 0$, et $A = 0$.

Exercice 2

Dans une base adaptée à $\text{Im } u$ on a $\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, avec $\text{Im } u = \text{Vect}(e_1)$. Ainsi, $\chi_U(x) = x^{n-1}(x - a_1)$.

Si $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ on a $a_1 = 0$ et $\text{Sp}(u) = \{0\}$ donc u n'est pas diagonalisable : sa seule valeur propre 0 est associée à un sous-espace propre de dimension $n - 1$.

Si $\text{Im } u \not\subset \text{Ker } u$ on a $a_1 \neq 0$ et $\text{Sp}(u) = \{0, a_1\}$ donc u est diagonalisable : 0 est associé à un sous-espace propre de dimension $n - 1$ et a_1 à un sous-espace propre de dimension 1 (valeur propre simple).

Exercice 3

χ_A est un polynôme réel de degré n sans racine réelle donc n est nécessairement pair et $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^p (x - \lambda_i)^{n_i} (x - \bar{\lambda}_i)^{n_i}$ où les λ_i sont complexes non réels.

$\det A$ est le produit des valeurs propres complexes (comptées avec leurs multiplicités) donc

$$\det A = \prod_{i=1}^p (\lambda_i \bar{\lambda}_i)^{n_i} = \prod_{i=1}^p |\lambda_i|^{2n_i} > 0.$$

Exercice 4

Il existe $P \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ diagonale tel que $B = PDP^{-1}$.

En posant $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ on a $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ et $A = Q \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array} \right) Q^{-1}$ donc A est diagonalisable.

Exercice 5

a) On raisonne par récurrence sur k .

– Si $k = 1$ le résultat est évident.

– Si $k \geq 2$, on suppose $u^{k-1} \circ v - v \circ u^{k-1} = (k-1)u^{k-1}$. Alors

$$u^k \circ v - v \circ u^k = u \circ (u^{k-1} \circ v - v \circ u^{k-1}) + v \circ u^{k-1} - v \circ u^k = (k-1)u^k + (u \circ v - v \circ u) \circ u^{k-1} = (k-1)u^k + u^k = ku^k$$

donc la récurrence se propage.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi(u^k) = ku^k$ donc si u^k est non nul, k est valeur propre de ϕ . Mais ϕ ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres, donc il existe un rang à partir duquel $u^k = 0$, et u est nilpotent.

Exercice 6

a) $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x & a_{n-1} \\ b_1 & \cdots & b_{n-1} & x \end{vmatrix}$. Lorsque $x \neq 0$, on effectue l'opération élémentaire $C_n \leftarrow C_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{x} C_i$. On obtient une

matrice triangulaire inférieure dont le déterminant vaut : $\chi_M(x) = x^{n-1} \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i b_i}{x} \right) = x^n - \lambda x^{n-2}$. Cette formule reste vraie pour $x = 0$ puisque deux polynômes égaux sur \mathbb{R}^* le sont aussi sur \mathbb{R} .

b) Si $\lambda \neq 0$ on note μ l'une de ses deux racines carrées. Alors $\chi_M(x) = x^{n-2}(x - \mu)(x + \mu)$ donc $\text{Sp}(M) = \{0, \mu, -\mu\}$. La matrice M est de rang 2 donc $\dim(\text{Ker } M) = n - 2$, ce qui montre que M est diagonalisable.

Si $\lambda = 0$ alors $\chi_M(x) = x^n$ et $\text{Sp}(M) = \{0\}$. Mais M n'est pas la matrice nulle, donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice 7

a) $\text{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ donc on peut choisir pour e_1 un vecteur propre associé à μ , pour e_2 un vecteur propre associé à λ , et compléter par e_3 pour obtenir une base de E . Sachant que $\text{tr } u = \mu + 2\lambda$ on a nécessairement $u(e_3) = \dots e_1 + \dots e_2 + \lambda e_3$.

b) On a $\text{Mat}_{(e)}(u - \lambda \text{Id}) = \begin{pmatrix} \mu - \lambda & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en élevant au carré, $\text{Mat}_{(e)}((u - \lambda \text{Id})^2) = \begin{pmatrix} (\mu - \lambda)^2 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\text{rg}((u - \lambda \text{Id})^2) = 1$.

c) D'après la question précédente, $\text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$ est un plan; de plus, pour tout $x \in \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$, $(u - \lambda \text{Id})^2 \circ u(x) = u \circ (u - \lambda \text{Id})^2(x) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(x) \in \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$. Ce plan est bien stable par u .

d) On a $e_2 \in \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$ car $(u - \lambda \text{Id})(e_2) = 0_E$; soit $b \in E$ tel que (e_2, b) soit une base de $\text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$.

On a $e_1 \notin \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2)$ car $(u - \lambda \text{Id})^2(e_1) = (\mu - \lambda)^2 e_1 \neq 0_E$ donc (e_1, e_2, b) est une base de E .

On a $u(b) \in \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^2) = \text{Vect}(e_2, b)$ par stabilité donc $\text{Mat}_{(e_1, e_2, b)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Enfin, $\alpha \neq 0$ car u n'est pas diagonalisable, donc en posant $e'_3 = \frac{1}{\alpha} b$ on a $u(e'_3) = e_2 + \lambda e'_3$.

Exercice 8

a) Dans un \mathbb{C} -espace vectoriel tout endomorphisme possède au moins une valeur propre (cas son polynôme caractéristique est scindé), et un vecteur propre engendre une droite stable par u .

b) Soit (b_1, \dots, b_k) une base de F . D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille libre par des vecteurs $(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_n})$ extraits de la famille génératrice (e_1, \dots, e_n) . Alors $G = \text{Vect}(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_n})$ est un supplémentaire de F stable par u .

c) On raisonne par récurrence sur n .

– Si $n = 1$, tout endomorphisme est diagonalisable.

– Si $n \geq 1$, on suppose le résultat acquis au rang $n - 1$. d'après la première question, il existe une droite F stable par u . Par hypothèse, F possède un supplémentaire G stable par u . On note u_G l'induit de u sur G .

Dans G , tout sous-espace vectoriel H stable par u_G possède un supplémentaire stable par u_G : en effet, par hypothèse il existe K stable par u tel que $E = H \oplus K$, et en posant $K' = K \cap G$ on a K' stable par u_G et $G = H \oplus K'$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire que u_G est diagonalisable. On en déduit que u est diagonalisable (c'est la situation décrite dans l'exercice 4). La récurrence se propage.