révision

Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Soit $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\mathrm{X}^k$, et

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&-a_0\\1&\ddots&&\vdots&-a_1\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\cdots&0&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

a. À l'aide d'une interprétation vectorielle de la matrice C, montrer que P en est un polynôme annulateur.

b. Trouver les éléments propres de C^{T}. À quelle condition C est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les scalaires a,b,c,d,e,f pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&1&d&e\\0&0&2&f\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $\mathrm{C}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de coordonnées $c_1,\dots,c_n$, et $\mathrm{M}=\mathrm{C}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Déterminer le rang de M, et en déduire le polynôme caractéristique de M.

b. À quelle condition portant sur C la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 4

Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ et A et J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivantes :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_1\\a_1&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&&&\ddots&1\\1&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en déduire qu'il en est de même de la matrice A.

Exercice 5

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\phi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(\mathrm{M})=\mathrm{M}+\mathrm{tr}(\mathrm{AM})\mathrm{B}$.
Caractériser les éléments propres (valeurs et vecteurs propres) de ϕ ; à quelle condition ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice 6

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-3\\-3&1&-3\\3&3&7\end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{X}^2=\mathrm{A}$.

Exercice 7

Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

a. Montrer que $\operatorname{tr} A \in \mathbb{Z}^-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que n est un entier pair, et calculer $\det A$.

c. On suppose toujours A inversible. Montrer l'existence d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A.

Exercice 8

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. On note f et g les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définis par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(M) = AM \quad \text{et} \quad g(M) = MA.$$

a. On suppose A diagonalisable. Montrer que f, g et $f - g$ sont diagonalisables.

Indication : utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. **(difficile)** On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f - g$ diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.