corrigé

Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Soit $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\mathrm{X}^k$, et

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&-a_0\\1&\ddots&&\vdots&-a_1\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\cdots&0&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

a. À l'aide d'une interprétation vectorielle de la matrice C, montrer que P en est un polynôme annulateur.

b. Trouver les éléments propres de C^T. À quelle condition C est-elle diagonalisable ?

a. Soit $\mathrm{E}=\mathbb{C}^n$, (e) la base canonique de E, et $u\in\in\mathrm{E}$ défini par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)=\mathrm{C}$. Les $n-1$ premières colonnes nous permettent d'affirmer que pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $e_k=u^{k-1}(e_1)$ et la dernière colonne donne :

$$u(e_n)=-\sum_{k=0}^{n-1}a_ke_{k+1}\quad\text{soit}\quad u^n(e_1)+\sum_{k=0}^{n-1}a_ku^k(e_1)=0_\mathrm{E}$$

On a donc $\mathrm{P}(u)(e_1)=0$, et alors pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $\mathrm{P}(u)(e_k)=\mathrm{P}(u)\circ u^{k-1}(e_1)=u^{k-1}\circ\mathrm{P}(u)(e_1)=u^{k-1}(0_\mathrm{E})=0_\mathrm{E}$. $\mathrm{P}(u)$ s'annule sur la base (e) donc est l'endomorphisme nul.

b. C et C^T ont mêmes valeurs propres, et celles-ci sont racines de P. Soit λ l'une d'entre elles. On résout :

$$\mathrm{C}^\mathrm{T}\mathrm{X}=\lambda\mathrm{X}\iff\begin{cases}x_k=\lambda x_{k-1}&\text{pour }2\leqslant k\leqslant n\\-\sum_{k=0}^{n-1}a_kx_{k+1}=\lambda x_n\end{cases}\iff\forall k\in[\![2,n]\!],\ x_k=\lambda^{k-1}x_1.$$

On constate que chaque sous-espace propre est de dimension 1, engendré par le vecteur $(1,\lambda,\dots,\lambda^{n-1})$. Pour que C^T, et donc C, soit diagonalisable il faut et il suffit que le polynôme P possède n racines distinctes.

Exercice 2

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les scalaires a,b,c,d,e,f pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&a&b&c\\0&1&d&e\\0&0&2&f\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$\chi_\mathrm{A}(x)=(x-1)^2(x-2)^2$ donc A est diagonalisable si et seulement si $\dim\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I})=2$ et $\dim\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-2\mathrm{I})=2$.

$\mathrm{A}-\mathrm{I}=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&1&f\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\mathrm{I})=\begin{cases}3&\text{si }a\neq0\\2&\text{si }a=0\end{cases}$. $\mathrm{A}-2\mathrm{I}=\begin{pmatrix}-1&a&b&c\\0&-1&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-2\mathrm{I})=\begin{cases}3&\text{si }f\neq0\\2&\text{si }f=0\end{cases}$.

On en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $a=f=0$.

Exercice 3

Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de coordonnées $c_1, \dots, c_n$, et $M = CC^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Déterminer le rang de M, et en déduire le polynôme caractéristique de M.

b. À quelle condition portant sur C la matrice M est-elle diagonalisable ?

a. Si $C = 0$, $M = 0$ est de rang nul. Si $C \neq 0$, $\operatorname{rg} M \leqslant \min(\operatorname{rg} C, \operatorname{rg} C^T) = \operatorname{rg} C = 1$. Mais M n'est pas la matrice nulle : si $c_k \neq 0$, le coefficient de rang (k,k) de M vaut $c_k^2 \neq 0$. On a donc $\operatorname{rg} M = 1$.

0 est donc valeur propre de M, de multiplicité au moins égale à $n-1$. On peut donc poser $\chi_M(x) = x^{n-1}(x-\lambda)$, et en observant le coefficient de x^{n-1} on déduit que $\lambda = \operatorname{tr} M = \sum_{k=1}^{n} c_{kk}^2$.

b. Si $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Sp}(M) = \{0, \lambda\}$. λ est racine simple donc le sous-espace propre est de dimension 1, et d'après la question précédente, le sous-espace propre associé à 0 (le noyau) est de dimension $n-1$ donc M est diagonalisable.

Si $\lambda = 0$ alors M est diagonalisable si et seulement si $M = 0$, soit encore $C = 0$.

Exercice 4

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et A et J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en déduire qu'il en est de même de la matrice A.

Posons $E = \mathbb{C}^n$, (e) la base canonique de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{(e)}(u) = J$. On observe que $u(e_k) = \begin{cases} e_n & \text{si } k = 1 \\ e_{k-1} & \text{sinon} \end{cases}$

donc pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $u^j(e_k) = \begin{cases} e_{n+k-j} & \text{si } k \leqslant j \\ e_{k-j} & \text{si } k > j \end{cases}$. En particulier, $u^n = \mathrm{Id}$ donc $J^n = I$. Le polynôme $X^n - 1$ annule J ; ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

De plus, le calcul des puissances de u montre que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ donc A est aussi diagonalisable, dans la même base de diagonalisation que J.

Remarque. Il est possible de diagonaliser J (et donc A) en résolvant $JX = \omega X$, où $\omega \in \mathbb{U}_n$: On trouve que chaque racine n^e de l'unité est bien valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension 1 engendré par le vecteur $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. Ainsi, si V désigne la matrice de Vandermonde associée aux racines de l'unité on a $J = V \operatorname{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n) V^{-1}$ et $A = V \operatorname{diag}(P(\omega_1), \dots, P(\omega_n)) V^{-1}$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Exercice 5

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = M + \operatorname{tr}(AM)B$.
Caractériser les éléments propres (valeurs et vecteurs propres) de ϕ ; à quelle condition ϕ est-il diagonalisable ?

Si $A = 0$ ou $B = 0$, $\phi = \mathrm{Id}$. On suppose désormais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
On résout $\phi(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$: autrement dit, $(\lambda - 1)M = \operatorname{tr}(AM)B$.

- Si $\lambda \neq 1$, M est nécessairement proportionnel à B. Or $\phi(B) = (1 + \operatorname{tr}(AB))B$ donc si $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$, $\lambda = 1 + \operatorname{tr}(AB)$ est valeur propre, et le sous-espace propre associé est égal à $\operatorname{Vect}(B)$.
- Si $\lambda = 1$, M est vecteur propre si et seulement si $\operatorname{tr}(AM) = 0$, ce qui est l'équation d'un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ donc). En effet, en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on peut observer que $\operatorname{tr}(AM) = 0$ est

l'équation de l'orthogonal de A^T.
En conclusion, si $\mathrm{tr}(AB) \neq 0$ on dispose de deux sous-espaces propres, l'un de dimension 1 et l'autre de dimension n^2-1 donc ϕ est diagonalisable.
En revanche, si $\mathrm{tr}(AB)=0$, seul 1 est valeur propre et le sous-espace propre n'est que de dimension n^2-1 donc ϕ n'est pas diagonalisable.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

Dans un premier temps, on diagonalise la matrice A ; je passe sur les détails de calcul, on doit obtenir :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $X = PYP^{-1}$. Alors $X^2 = A \iff PY^2P^{-1} = PDP^{-1} \iff Y^2 = D$.

On a $YD = Y^3 = DY$ donc Y commute avec D, et on sait que les éléments du commutant de D s'écrivent $Y = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{Z}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$ avec $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, $Y^2 = D \iff Z^2 = 4I_2$ et $\lambda^2 = 1$ donc $\lambda = \pm 1$ et puisque le polynôme $X^2 - 4$ est scindé à racines simples, Z est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(Z) \subset \{-2, 2\}$. Z est donc semblable à l'une des trois matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc les solutions s'écrivent :

$$X = P\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)P^{-1} \quad \text{ou} \quad X = P\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)P^{-1} \quad \text{ou} \quad X = P\left(\begin{array}{c|c} Q\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}Q^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \lambda \end{array}\right)P^{-1}$$

avec $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7

Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

a. Montrer que $\mathrm{tr}\, A \in \mathbb{Z}^-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que n est un entier pair, et calculer $\det A$.

c. On suppose toujours A inversible. Montrer l'existence d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A.

a. Si λ est une valeur propre réelle ou complexe de A, alors $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$ donc $\lambda \in \{0, j, \bar{j}\}$.
Son polynôme caractéristique s'écrit $\chi_A(x) = x^p(x-j)^q(x-\bar{j})^r$ avec $p+q+r = n$ et $q = r$ car A est une matrice réelle.
On a alors $\mathrm{tr}\, A = qj + q\bar{j} = -q \in \mathbb{Z}^-$.

b. Si A est inversible 0 n'est pas valeur propre donc $\chi_A(x) = (x-j)^q(x-\bar{j})^q$ et $n = 2q$ est pair.
On sait que le coefficient constant du polynôme caractéristique vaut $(-1)^n \det A$ donc $(j\bar{j})^q = (-1)^{2q}\det A$, soit $\det A = 1$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre complexe pour la valeur propre j : $Az = jz$. Posons $z = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}^n$. Alors $Ax + iAy = j(x+iy) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$ et en séparant parties réelle et imaginaire :

$$Ax = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad \text{et} \quad Ay = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Ces égalités impliquent que le sous-espace vectoriel $H = \mathrm{Vect}(x, y)$ est stable par A. Il reste à montrer qu'il est de dimension 2.
Supposons (x, y) liée : il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha x + \beta y = 0$.
On a aussi $\alpha Ax + \beta Ay = 0$, ce qui s'écrit : $\frac{1}{2}(\alpha x + \beta y) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\beta x - \alpha y) = 0$. On dispose donc des deux égalités :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \beta x - \alpha y = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première par α, la seconde par β et en sommant on obtient $(\alpha^2 + \beta^2)x = 0$. Mais $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, donc $x = 0$, et le système impose alors $y = 0$ soit $z = 0$, ce qui est absurde s'agissant d'un vecteur propre.

Exercice 8

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. On note f et g les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définis par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(M) = AM \quad \text{et} \quad g(M) = MA.$$

a. On suppose A diagonalisable. Montrer que f, g et $f - g$ sont diagonalisables.
Indication : utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. **(difficile)** On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f - g$ diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

a. Posons $A = PDP^{-1}$, avec $D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk}$ une matrice diagonale.
On pose $M_{ij} = PE_{ij}$. Puisque P est inversible, (M_{ij}) est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et

$$f(M_{ij}) = PDE_{ij} = P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk} E_{ij}\right) = \lambda_i PE_{ij} = \lambda_i M_{ij}$$

donc les (M_{ij}) forment une base de vecteurs propres de f, qui est donc diagonalisable.
On pose de même $N_{ij} = E_{ij}P^{-1}$. Alors $g(N_{ij}) = E_{ij}DP^{-1} = \lambda_j E_{ij}P^{-1} = \lambda_j N_{ij}$ donc (N_{ij}) constitue une base de vecteurs propres de g, qui est donc diagonalisable.
Enfin, on pose $O_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$. On calcule $f(O_{ij}) = \lambda_i O_{ij}$ et $g(O_{ij}) = \lambda_j O_{ij}$ donc $(f - g)(O_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)O_{ij}$, ce qui prouve que (O_{ij}) est une base de vecteurs propres de $f - g$.
b. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A possède au moins une valeur propre λ, et $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$ (les vecteurs propres de A donc des vecteurs colonnes).
Considérons maintenant un vecteur propre $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de $(f - g)$: on a $(f - g)(M) = \mu M$ (attention, ici les vecteurs propres de $f - g$ sont des matrices carrées).
On a $AM = MA + \mu M$ donc $AMX = MAX + \mu MX = (\lambda + \mu)MX$. Ceci montre que que ou bien $MX = 0$, ou bien MX est un vecteur propre de A (pour la valeur propre $\lambda + \mu$).
Considérons maintenant une base (M_{ij}) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de $f - g$. Nous allons montrer que la famille $(M_{ij}X)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^n$.
Soit donc $Y \in \mathbb{C}^n$. Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $PX = Y$. Or P se décompose dans la base des (M_{ij}) : $P = \sum_{i,j} p_{ij} M_{ij}$ donc $Y = PX = \sum_{i,j} p_{ij} M_{ij} X$.
Il reste à extraire de la famille $(M_{ij}X)$ une base pour obtenir une base formée de vecteurs propres de A, qui est donc diagonalisable.