Probabilités

Espaces probabilisés

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où Ω est l'*univers*, $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une *tribu*, $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ une *probabilité*.

Tribu

$\mathscr{A}$ est une tribu lorsque $\begin{cases} \Omega \in \mathscr{A} \\ A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A} \\ (A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A} \end{cases}$ **Conséquences :** $\varnothing \in \mathscr{A}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Probabilité

$\mathbb{P}$ est une probabilité lorsque $\begin{cases} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \text{si } i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \end{cases}$.

Conséquences : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ $\quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ $\quad A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

Théorèmes de limite monotone

- Si $A_n \subset A_{n+1}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.
- Si $A_{n+1} \subset A_n$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

Conséquences : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(B_n)$ avec $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mathbb{P}(C_n)$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$.

Univers dénombrable

Si $\Omega = \left\{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est dénombrable on peut choisir $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et définir $\mathbb{P}$ en posant $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ avec $p_n \geqslant 0$ et $\sum_n p_n = 1$.

Conditionnement

La *probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ est définie par : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$.
$(B_i)_{i\in I}$ est un *système complet d'événements* lorsque $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \varnothing$ et $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$.

Formule des probabilités totales : si $(B_i)_{i\in I}$ est un *s.c.e.*, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$.

Formule de Bayes : si $(B_i)_{i\in I}$ est un *s.c.e.*, $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j\in I} \mathbb{P}(A \mid B_j)\mathbb{P}(B_j)}$.

Indépendance

A et B sont *indépendants* lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. **Conséquence** : $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.
Les (A_n) sont *indépendants* lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, $\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_k}) = \mathbb{P}(A_{n_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{n_k})$.

Variables aléatoires

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *variable aléatoire réelle* lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$. X est *discrète* lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Loi de X : si $X(\Omega) = \left\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, et $\sum_n p_n = 1$ avec $p_n \geqslant 0$, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

Couple de variables aléatoires

La loi *conjointe* de X et de Y est la loi de (X, Y) ; les lois *marginales* de (X, Y) sont les lois de X et de Y. On a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y)$$

X et Y sont *indépendantes* lorsque $\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *mutuellement indépendantes* lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n_1 < \cdots < n_k$,

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = x_1 \text{ et } \cdots \text{ et } X_{n_k} = x_k) = \mathbb{P}(X_{n_1} = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{n_k} = x_k).$$

Lemme des coalitions : si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Espérance, variance

Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, X possède *un moment d'ordre k* lorsque $\sum x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument.

Si X possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big)$.

Propriétés de l'espérance

• $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ • $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$ • $X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ • X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Théorème de transfert : $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$.

Inégalités de Cauchy-Schwarz : $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$.

Formule alternative lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

Propriétés de la variance

- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$;
- $\mathbb{V}(X,Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$;
- $\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$;
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$;

Série génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = n) t^n$. Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$.

X admet un moment d'ordre 1 ssi G_X est dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$.

X admet un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1, et dans ce cas $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.

Inégalités de concentration

Markov Si $X \geqslant 0$ possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Bienaymé-Tchebychev Si X possède un moment d'ordre 2, $\mathbb{P}\Big(\big|X - \mathbb{E}(X)\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$

Loi faible des grands nombres Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \quad \text{avec} \quad m = E(X) \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma(X)$$

Formulaire

$X \sim$	$X(\Omega)$	Loi de X	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$	$G_X(t)$
$\mathscr{U}(n)$	$[\![1,n]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{1}{n}(t + \cdots + t^n)$
$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = q$	p	pq	$pt + q$
$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pt}{1-qt}$
$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(pt+q)^n$
$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$