Interrogation sur les probabilités

Durée : libre

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) (1 pt) Montrer que $N = \inf\left\{n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, X_n = 1\right\}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Rappel. Il s'agit donc de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $[N = m]$ est un événement.

b) (1,5 pts) On suppose que les (X_n) sont mutuellement indépendantes et que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n+1}$. Montrer que $\mathbb{P}(N = +\infty) = 0$.

Exercice 2

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète, et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(a) = \mathbb{P}(X > a)$.

a) (0,5 pt) Préciser la monotonie de F. *On en déduit que* F *possède en toute point de* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *une limite à droite et à gauche.*

b) (1,5 pt) Déterminer $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a)$.

c) (2 pts) Montrer que F est continue à droite en tout $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $F(a^-) - F(a^+)$?

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et N une variable aléatoire indépendante de la suite (X_n) et suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

On pose $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$.

a) (1 pt) Déterminer $\mathbb{P}\left(Y = k \,\middle|\, N = n\right)$ et $\mathbb{P}\left(Z = k \,\middle|\, N = n\right)$.

b) (1 pt) Montrer que Y et Z suivent des lois de Poisson.

c) (1,5 pts) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

(1,5 pts) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi.
On pose $a_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} a_k$.
En évaluant de deux façons $\mathbb{P}(X > Y)$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\right)$.

Exercice 5

(1 pt) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et N une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$.
Calculer l'espérance de $Y = X_1 X_2 \cdots X_N$.

Exercice 6

a) (0,5 pt) Soit X une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}(X)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer $\mathbb{E}\left((X-\lambda)^2\right)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$ et de $\delta = \mu - \lambda$.

b) (1,5 pts) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes possédant toutes un moment d'ordre 2. On pose $\mu_n = \mathbb{E}(X_n)$ et on suppose que $\lim \mu_n = \lambda$ et $\lim \mathbb{V}(X_n) = 0$.
Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - \lambda| \geqslant \epsilon\right) = 0$.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives et d'espérance finie. Il existe donc une suite (x_n) de nombres positifs telle que $X(\Omega) \subset \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$. On pose $\mu = \mathbb{E}(X)$ et on considère un réel λ vérifiant $0 \leqslant \lambda < \mu$.

a) (0,5 pt) Montrer que $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{-tX})$ est définie pour tout $t \geqslant 0$.

b) (2 pts) Montrer que ϕ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\phi'(0) = -\mu$.

c) (1 pt) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $e^{\lambda\alpha}\,\phi(\alpha) < 1$. On pose désormais $K = e^{\lambda\alpha}\,\phi(\alpha)$.

d) (2 pts) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En considérant l'espérance de $Y = \exp(-\alpha S_n)$, montrer que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant \lambda\right) \leqslant K^n$.