Corrigé : interrogation sur les probabilités

Exercice 1

a) Si $m \in \mathbb{N}^*$, $[N = m] = [X_m = 1] \cap \bigcap_{k=0}^{m-1} [X_k = 0]$ donc $[N = m]$ est un événement.

$[N = +\infty] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [X_k = 0]$ donc $[N = +\infty]$ est un événement. N est bien une variable aléatoire.

b) Posons $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]$. La suite (A_n) est décroissante et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = [N = +\infty]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(N = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Par indépendance, $\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \dfrac{1}{k+1}\Big) = \dfrac{1}{n+1}$ (télescopage) donc $\mathbb{P}(N = +\infty) = 0$.

Exercice 2

a) Si $a < b$ on a $[X > b] \subset [X > a]$ donc $\mathbb{P}(X > b) \leqslant \mathbb{P}(X > a)$; la fonction F est décroissante.

b) On a $[x > n+1] \subset [x > n]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [X > n]\Big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
On a $\lim_{+\infty} F(n) = 0$ et puisque la limite en $+\infty$ existe, $\lim_{+\infty} F(a) = 0$.
On a $[X > -n] \subset [X > -n-1]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X > -n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X > -n]\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
On a $\lim_{+\infty} F(-n) = 1$ et puisque la limite en $-\infty$ existe, $\lim_{-\infty} F(a) = 1$.

c) F possède une limite à droite en a donc $F(a^+) = \lim_{n \to +\infty} F\Big(a + \dfrac{1}{n}\Big)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Big[X > a + \dfrac{1}{n}\Big] \subset \Big[X > a + \dfrac{1}{n+1}\Big]$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $F(a^+) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Big[X > a + \dfrac{1}{n}\Big]\Big) = \mathbb{P}(X > a) = F(a)$ donc F est continue à droite en a.

De même, $F(a^-) = \lim_{n \to +\infty} F\Big(a - \dfrac{1}{n}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Big[X > a - \dfrac{1}{n}\Big]\Big) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$ donc $F(a^-) - F(a^+) = \mathbb{P}(X \geqslant a) - \mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X = a)$.

Exercice 3

a) $\big(Y \,\big|\, N = n\big) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ donc $\mathbb{P}\big(Y = k \,\big|\, N = n\big) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ si $k \in [\![0, n]\!]$, et 0 sinon.

$Z = N - Y$ donc $\mathbb{P}\big(Z = k \,\big|\, N = n\big) = \mathbb{P}(Y = n - k \,\big|\, N = n\big) = \dbinom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$ si $k \in [\![0, n]\!]$, et 0 sinon.

b) $\mathbb{P}(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{p^k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda p}$ donc Y suit une loi de Poisson de paramètre λp. De manière analogue, Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

c) $\mathbb{P}(Y = k \text{ et } Z = k') = \mathbb{P}(Y = k \text{ et } N = k + k') = \mathbb{P}\big(Y = k \mid N = k + k'\big)\mathbb{P}(N = k + k')$

$$= \binom{k+k'}{k} p^k (1-p)^{k'} \frac{\lambda^{k+k'}}{(k+k')!} e^{-\lambda} = \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda p} \frac{(1-p)^{k'}}{k'!} e^{-(1-p)\lambda} = \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = k')$$

donc Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4

D'une part, $\mathbb{P}(X > Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(X > n \text{ et } Y = n\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\Big)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n$.

En inversant les rôles de X et Y on obtient de même $\mathbb{P}(X < Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n$ et en sommant :

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(X = n \text{ et } Y = n\big) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$$

Exercice 5

$Y(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{P}\big(Y=1 \mid N=n\big)=p^n$ donc $\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\big(Y=1 \mid N=n\big)\mathbb{P}(N=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}p^n\Big(\frac{1}{2}\Big)^n=\frac{p}{2-p}$.

Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{p}{2-p}$ donc $\mathbb{E}(Y)=\frac{p}{2-p}$.

Exercice 6

a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\big((X-\lambda)^2\big)=\mathbb{E}(X^2)-2\lambda\mathbb{E}(X)+\lambda^2=\mathbb{V}(X)+\mu^2-2\lambda\mu+\lambda^2=\mathbb{V}(X)+(\mu-\lambda)^2$.

b) $\mathbb{P}\big(|X_n-\lambda|\geqslant\epsilon\big)=\mathbb{P}\big((X_n-\lambda)^2\geqslant\epsilon^2\big)$ donc d'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}\big(|X_n-\lambda|\geqslant\epsilon\big)\leqslant\frac{\mathbb{E}\big((X_n-\lambda)^2\big)}{\epsilon}$.

D'après la question précédente, $\mathbb{P}\big(|X_n-\lambda|\geqslant\epsilon\big)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\epsilon}+\frac{(\mu_n-\lambda)^2}{\epsilon}$.

Or $\lim\mathbb{V}(X_n)=0$ et $\lim\mu_n=\lambda$ donc $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big(|X_n-\lambda|\geqslant\epsilon\big)=0$.

Exercice 7

a) X est fini ou dénombrable donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs telle que $X(\Omega)\subset\big\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\big\}$.

Pour tout $t\geqslant 0$ on a $e^{-tx_n}\leqslant 1$ donc $0\leqslant e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X=x_n)\leqslant\mathbb{P}(X=x_n)$. Puisque la série $\sum\mathbb{P}(X=x_n)$ converge (sa somme est égale à 1) il en est de même de $\sum e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X=x_n)$, ce qui assure que $\mathbb{E}(e^{-tX})$ existe.

b) Posons $f_n(t)=e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X=x_n)$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(t)=-x_n\,e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X=x_n)$ donc sur $[0,+\infty[$, $\|f_n'\|_\infty=x_n\mathbb{P}(X=x_n)$. Puisque X possède une espérance la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$ donc ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, et $\phi'(t)=-\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\,e^{-tx_n}\,\mathbb{P}(X=x_n)$. En particulier, $\phi'(0)=-\sum_{n=0}^{+\infty}x_n\mathbb{P}(X=x_n)=-\mu$.

c) D'après la formule de Taylor-Young, $\phi(t)\underset{0}{=}1-\mu x+o(x)$ donc $e^{\lambda t}\,\phi(t)\underset{0}{=}\big(1+\lambda t+o(t)\big)\big(1-\mu t+o(t)\big)\underset{0}{=}1+(\lambda-\mu)t+o(t)$.

Puisque $\lambda-\mu<0$, il existe $\epsilon>0$ tel que sur $]0,\epsilon[$, $e^{\lambda t}\,\phi(t)<1$.

d) On a $\frac{S_n}{n}\leqslant\lambda \iff Y\geqslant e^{-\lambda n\alpha}$ donc d'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n}\leqslant\lambda\Big)=\mathbb{P}\big(Y\geqslant e^{-\lambda n\alpha}\big)\leqslant\frac{\mathbb{E}(Y)}{e^{-\lambda n\alpha}}$.

Les X_k sont indépendants donc il en est de même des $e^{-\alpha X_k}$ et ainsi, $\mathbb{E}(Y)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(e^{-\alpha X_k}\big)=\mathbb{E}\big(e^{-\alpha X}\big)^n=\phi(\alpha)^n=K^n\,e^{-\lambda n\alpha}$ et donc $\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n}\leqslant\lambda\Big)\leqslant K^n$.