Probabilités

Exercice 1

On lance une pièce avec la probabilité p de faire Pile, et on note N le rang d'apparition du premier Pile. Si on obtient Pile pour la première fois au n^e lancer, on lance à nouveau n fois la pièce et on note X le nombre de Pile obtenus au cours de ces n nouveaux lancers. Déterminer la loi de X, puis son espérance.

Exercice 2

On considère $n+2$ variables aléatoires $X_0, \dots, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on pose $Y_k = (X_{k+1} - X_k)^2$. Donner la loi de Y_k. Les Y_k sont-elles deux à deux indépendantes ?

Exercice 3

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^T \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$. Soit enfin $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

a. Déterminer les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{tr}(M)$.

b. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'une projection ?

c. On note $S = V^T M V$. Calculer l'espérance de S.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées suivant une loi d'espérance μ et de variance v. On note M la matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $X_{i,j}$.

a. Déterminer l'espérance de $\mathrm{tr}(M)$ puis de $\mathrm{tr}(M^2)$.

b. Déterminer l'espérance de $\det(M)$.

Exercice 5

On considère une succession de n épreuves indépendantes, chaque épreuve pouvant donner k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$.
On note p_i la probabilité d'obtention du résultat r_i lors d'une épreuve donnée.
Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours de ces n épreuves.

a. Justifier que $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

b. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.

c. Pour $i \neq j$, , donner la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance, et en déduire $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$.

d. Retrouver alors le résultat de la première question.

Exercice 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant toutes un moment d'ordre 2, et on considère la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : $S = \left\{ u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1 \right\}$.

On note enfin $C = \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice des covariances des X_k.

Exprimer $\min\limits_{u \in S} \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k X_k\right)$ à l'aide des valeurs propres de C. Pour quels vecteurs ce minimum est-il atteint ?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}\big(|X|\big) = 0$. Montrer que X est quasi-certainement nulle.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \mathbb{P}(X = n)$ et on suppose qu'il existe un réel $\mu \in]0,1[$ tel que $a_n = O(\mu^n)$.

a. Pour tout $t \geqslant 0$ on pose $L(t) = \mathbb{E}(e^{-tX})$. Montrer (à l'aide des théorèmes relatifs aux séries de fonctions) que la fonction L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L^{(k)}(0) = (-1)^k \mathbb{E}(X^k)$.

b. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geqslant 0$, $L(t) = e^{-pt}$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = p^k$ et en déduire que X est presque sûrement constante (considérer les valeurs $k = 1$ et $k = 2$).