corrigé

Probabilités

Exercice 1

On lance une pièce avec la probabilité p de faire Pile, et on note N le rang d'apparition du premier Pile. Si on obtient Pile pour la première fois au n^{e} lancer, on lance à nouveau n fois la pièce et on note X le nombre de Pile obtenus au cours de ces n nouveaux lancers. Déterminer la loi de X, puis son espérance.

On observe que $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $(\mathrm{X} \mid \mathrm{N}=n) \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Ainsi, $\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=\sum_{n=\max(1,k)}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k \mid \mathrm{N}=n)\mathbb{P}(\mathrm{N}=n)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} p q^{n-1} & \text{si } k \geqslant 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^n p q^{n-1} & \text{si } k=0 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)=\dfrac{pq}{1-q^2}=\dfrac{q}{1+q}$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=\dfrac{p^{k+1}q^{k-1}}{k!}\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)q^{2(n-k)}$.

On reconnaît $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ donc

$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=\frac{p^{k+1}q^{k-1}}{(1-q^2)^{k+1}}=\frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$

En calcule $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}=\frac{1}{(1+q)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(\frac{q}{1+q}\Big)^{n-1}=\frac{1}{(1+q)^2}\times\frac{1}{\big(1-\frac{q}{1+q}\big)^2}=1.$

Remarque. Il s'agit d'une illustration de la formule de Wald : $\mathrm{X}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{Y}_k$ où $\mathrm{N} \sim \mathcal{G}(p)$ et $\mathrm{Y}_k \sim \mathcal{B}(p)$, la famille (Y_k) étant indépendante. Dans ce cas, cette formule affirme que $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\mathbb{E}(\mathrm{N})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ soit dans le cas présent, $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\dfrac{1}{p}\times p=1$.

Exercice 2

On considère $n+2$ variables aléatoires $\mathrm{X}_0,\ldots,\mathrm{X}_{n+1}$ mutuellement indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on pose $\mathrm{Y}_k=(\mathrm{X}_{k+1}-\mathrm{X}_k)^2$. Donner la loi de Y_k. Les Y_k sont-elles deux à deux indépendantes ?

On a $\mathrm{Y}_k(\Omega)=\{0,1\}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k=0)&=\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=\mathrm{X}_{k+1})=\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=0 \text{ et } \mathrm{X}_{k+1}=0)+\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=1 \text{ et } \mathrm{X}_{k+1}=1)\\&=\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=0)\mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1}=0)+\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=1)\mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1}=1)\\&=(1-p)^2+p^2=1-2p+2p^2=1-2p(1-p)=1-2pq \quad \text{avec } q=1-p\end{aligned}$$

On en déduit que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.
Si $|i-j|>1$ le lemme des coalitions permet d'affirmer que Y_i et Y_j sont indépendantes. Reste à examiner le cas de Y_k et Y_{k+1}. Calculons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k=1 \text{ et } \mathrm{Y}_{k+1}=1)&=\mathbb{P}(\mathrm{X}_k \neq \mathrm{X}_{k+1} \text{ et } \mathrm{X}_{k+1} \neq \mathrm{X}_{k+2})=\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=\mathrm{X}_{k+2} \neq \mathrm{X}_{k+1})\\&=\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=\mathrm{X}_{k+2}=0 \text{ et } \mathrm{X}_{k+1}=1)+\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=\mathrm{X}_{k+2}=1 \text{ et } \mathrm{X}_{k+1}=0)\\&=pq^2+qp^2=pq\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k=1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1}=1)=4p^2q^2$ donc pour que Y_k et Y_{k+1} soient indépendantes, il est nécessaire que $pq=4p^2q^2$

soit $pq = \frac{1}{4}$, ce qui équivaut à $p = \frac{1}{2}$.
Une condition nécessaire d'indépendance deux à deux est donc que $p = 1/2$. Il reste à vérifier qu'elle est suffisante :

- $\mathbb{P}(Y_k = 0 \text{ et } Y_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(X_k = X_{k+1} = X_{k+2}) = p^3 + q^3 = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Y_k = 0)\mathbb{P}(Y_{k+1} = 0)$
- $\mathbb{P}(Y_k = 0 \text{ et } Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_k = X_{k+1} \neq X_{k+2}) = p^2q + q^2p = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Y_k = 0)\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1)$
- $\mathbb{P}(Y_k = 1 \text{ et } Y_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(X_k \neq X_{k+1} = X_{k+2}) = p^2q + q^2p = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}(Y_{k+1} = 0)$

Exercice 3

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^T \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$. Soit enfin $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

a. Déterminer les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{tr}(M)$.

b. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'une projection ?

c. On note $S = V^TMV$. Calculer l'espérance de S.

a. On a $U = 0 \implies \mathrm{rg}(M) = 0$ et $U \neq 0 \implies \mathrm{rg}(M) = 1$. Or $U = 0 \iff \forall k \in [\![1,n]\!], X_k = 0$ donc par indépendance, $\mathbb{P}(U = 0) = (1-p)^n$. On en déduit que $\mathrm{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

$\mathrm{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k$ car $X_k^2 = X_k$ donc $\mathrm{tr}(M)$ suit une loi binomiale de paramètre p.

b. $M^2 = U(U^TU)U^T$ et U^TU est un scalaire donc $M^2 = (U^TU)M$. Or $U^TU = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \mathrm{tr}(M)$ donc M est la matrice d'une projection si et seulement si $M = 0$ ou $\mathrm{tr}(M) = 1$. D'après la question précédente, la probabilité que M soit une matrice de projection est donc égale à $(1-p)^n + \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = \big(1+(n-1)p\big)(1-p)^{n-1}$.

c. $S = V^TUU^TV = \langle U \mid V\rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = Y^2$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Ainsi, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 = npq + (np)^2$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées suivant une loi d'espérance μ et de variance ν. On note M la matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $X_{i,j}$.

a. Déterminer l'espérance de $\mathrm{tr}(M)$ puis de $\mathrm{tr}(M^2)$.

b. Déterminer l'espérance de $\det(M)$.

a. $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_{i,i}$ donc par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\mathrm{tr}\, M) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{i,i}) = n\mu$.

$\mathrm{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}X_{ji} = \sum_{i=1}^{n} X_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} X_{ij}X_{ji}$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{tr}\, M^2) = \sum_{i=1}^{n}(\nu+\mu^2) + 2\sum_{i<j}\mu^2 = n(\nu+\mu^2) + n(n-1)\mu^2 = n\nu + n^2\mu^2$.

b. Pour $n \geqslant 2$, développons le déterminant suivant sa dernière ligne : on obtient $\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} X_{n,j}\Delta_{n,j}$ où $\Delta_{i,j}$ est le mineur de rang (i,j). D'après le lemme des coalitions, $X_{n,j}$ et $\Delta_{n,j}$ sont indépendants donc

$$e_n = \mathbb{E}(\det M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}\mathbb{E}(X_{n,j})\mathbb{E}(\Delta_{n,j}) = (-1)^n \mu e_{n-1} \sum_{j=1}^{n}(-1)^j$$

en ayant noté $e_n = \mathbb{E}(\det M)$ et $e_{n-1} = \mathbb{E}(\Delta_{n,j})$. On constate que pour n pair on a $e_n = 0$, puis que cette formule montre que c'est aussi le cas pour n impair.

Exercice 5

On considère une succession de n épreuves indépendantes, chaque épreuve pouvant donner k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$.
On note p_i la probabilité d'obtention du résultat r_i lors d'une épreuve donnée.
Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours de ces n épreuves.

a. Justifier que $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

b. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.

c. Pour $i \neq j$, , donner la loi de $X_i + X_j$, son espérance et sa variance, et en déduire $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

d. Retrouver alors le résultat de la première question.

a. On a $X_1 + \cdots + X_k = n$ donc $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$ (la variance d'une constante est nulle).

b. X_i suis une loi binomiale de paramètre (n, p_i) donc $\mathbb{E}(X_i) = np_i$ et $\mathbb{V}(X_i) = np_i(1-p_i)$.

c. $X_i + X_j$ suis une loi binomiale de paramètre $(n, p_i + p_j)$ donc $\mathbb{E}(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)$ et $\mathbb{V}(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$.
On en déduit que $2\operatorname{cov}(X_i, X_j) = V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j) = (\text{calcul}) = -2np_ip_j$ et donc que $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j$.

d. $$V(X_1 + \cdots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$
$$= n\sum_{i=1}^{k} p_i(1-p_i) - n\sum_{i\neq j} p_ip_j = n\sum_{i=1}^{k} p_i - n\Big(\sum_{i=1}^{k} p_i\Big)^2 = 0 \text{ puisque } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Exercice 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant toutes un moment d'ordre 2, et on considère la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : $S = \Big\{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1\Big\}$.

On note enfin $C = \big(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice des covariances des X_k.

Exprimer $\min_{u \in S} \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k X_k\Big)$ à l'aide des valeurs propres de C. Pour quels vecteurs ce minimum est-il atteint ?

Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u^T Cu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i \operatorname{cov}(X_i, X_j) u_j = \operatorname{cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i, \sum_{j=1}^{n} u_j X_j\Big) = \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k X^k\Big)$ donc il s'agit de minimiser la fonction $u \mapsto u^T Cu$ sur S.
Par ailleurs, la matrice C est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée formée de vecteurs propres de C, posons $Ce_k = \lambda_k e_k$ et ordonnons les valeurs propres en supposant par exemple $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Notons déjà que $e_i^T Ce_j = \lambda_j e_i^T e_j = \lambda_j \langle e_i \mid e_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$.
Tout vecteur de S s'écrit $u = \sum_{k=1}^{n} u'_k e_k$ avec $\sum_{k=1}^{n} {u'_k}^2 = 1$ donc $u^T Cu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u'_i u'_j e_i^T Ce_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k {u'_k}^2$.

Ainsi, $u^T Cu \geqslant \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} {u'_k}^2 = \lambda_1$, avec égalité si et seulement si $\lambda_i > \lambda_1 \implies u'_i = 0$. Autrement dit, le minimum est atteint pour tous les vecteurs propres unitaires associés à la valeur propre λ_1.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}\big(|X|\big) = 0$. Montrer que X est quasi-certainement nulle.

D'après l'inégalité de Markov, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}\big(|X| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{a} = 0$ donc $\mathbb{P}\big(|X| \geqslant a\big) = 0$.

Notons maintenant que $[X = 0] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left[|X| < \dfrac{1}{n}\right]$ donc d'après le théorème de limite monotone,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X| < \frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(1 - \mathbb{P}\Big(|X| \geqslant \frac{1}{n}\Big)\Big) = 1$$

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \mathbb{P}(X = n)$ et on suppose qu'il existe un réel $\mu \in]0,1[$ tel que $a_n = O(\mu^n)$.

a. Pour tout $t \geqslant 0$ on pose $L(t) = \mathbb{E}(e^{-tX})$. Montrer (à l'aide des théorèmes relatifs aux séries de fonctions) que la fonction L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L^{(k)}(0) = (-1)^k\mathbb{E}(X^k)$.

b. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geqslant 0$, $L(t) = e^{-pt}$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k) = p^k$ et en déduire que X est presque sûrement constante (considérer les valeurs $k = 1$ et $k = 2$).

a. D'après le théorème de transfert, $L(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = a_n e^{-nt}$. On a $\|f_n\|_\infty = a_n$ et $\sum a_n$ converge donc la convergence de $\sum f_n$ est normale, et donc uniforme, sur $\mathbb{R}_+$. Ceci prouve déjà que $L(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, puisque les fonctions f_n le sont.

Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(t) = (-n)^k a_n e^{-nt}$ donc $\|f_n^{(k)}\|_\infty = n^k a_n = O(\lambda^n)$ avec $0 < \lambda < \mu$. La convergence de $\sum f_n^{(k)}$ est normale, donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction L est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $L^{(k)}(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-n)^k a_n e^{-nt}$ et donc $L^{(k)}(0) = (-1)^k \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^k a_n = (-1)^k\mathbb{E}(X^k)$ toujours d'après le théorème de transfert.

b. Si $L(t) = e^{-pt}$ alors $L^{(k)}(0) = (-p)^k$ donc $\mathbb{E}(X^k) = p^k$. En particulier, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{E}(X^2) = p^2$ donc $\mathbb{V}(X) = 0$, ce qui prouve que X est presque sûrement constante égale à p. En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\Big(|X - p| \geqslant \dfrac{1}{n}\Big) = 0$ et par croissance monotone, $\mathbb{P}\big(|X - p| > 0\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(|X - p| \geqslant \dfrac{1}{n}\Big) = 0$.