

Intégration sur un segment

Sommes de Riemann

Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et $a \in I$, l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 , et $F' = f$.

Formules de Taylor

Aspect global : inégalité de Taylor-Lagrange

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} alors pour tout $a \in I$, pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, x]}$$

Aspect local : formule de Taylor-Young

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} , alors pour tout $a \in I$, $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + O(h^{n+1})$.

Intégration sur un intervalle

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est *intégrable* sur I lorsque l'intégrale $\int_I |f|$ converge. On a :

$$f \text{ intégrable} \iff \int_I |f| \text{ converge} \implies \int_I f \text{ converge} \quad (\text{la réciproque est fausse})$$

Schémas de convergence et de divergence

Lorsque $I = [a, b[$ et $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ telles que $f(x) = O(g(x))$ on a :

$$\int_a^b |g(t)| dt \text{ converge} \implies \int_a^b |f(t)| dt \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_a^b |f(t)| dt \text{ diverge} \implies \int_a^b |g(t)| dt \text{ diverge}$$

Inégalités de Cauchy-Schwarz

Si f^2 et g^2 sont intégrables il en est de même de fg , et $\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}$.

Intégrales à paramètre

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in J$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I . On définit $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ en posant $g(x) = \int_I f(x, t) dt$.

Continuité sous le signe intégral

- (i) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J ;
- (ii) il existe $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que $\forall x \in J$, $|f(x, t)| \leq \phi(t)$.

Alors g est continue sur J .

Limite aux bornes

- (i) pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- (ii) il existe $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que $\forall x \in J$, $|f(x, t)| \leq \phi(t)$.

Alors ℓ est intégrable sur I , et $\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$.

■ Dérivabilité sous le signe intégral

(i) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J ;

(ii) il existe $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que $\forall x \in J$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t)$.

Alors g est de classe \mathcal{C}^1 sur J , et $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

■ Dérivabilité d'ordre p sous le signe intégral

(i) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^p sur J ;

(ii) pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\forall x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur I ;

(iii) il existe $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que $\forall x \in J$, $\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \phi(t)$.

Alors g est de classe \mathcal{C}^p sur J , et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$.