

CORRIGÉ : INTERROGATION SUR L'INTÉGRATION

Exercice 1

a) Lorsque $\alpha > 1$, $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ avec $1 < \beta < \alpha$ donc $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)}$ converge.

Lorsque $\alpha < 1$, $\frac{1}{t^\beta} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha(\ln t)}\right)$ avec $\alpha < \beta < 1$ donc $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)}$ diverge.

Lorsque $\alpha = 1$, $\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)} = \ln(\ln(x))$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)} = +\infty$ et $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)}$ diverge.

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}} dt$ converge.

$\int_1^2 \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}} dt$ a même nature (en posant $u = t-1$) que $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)^\alpha}{u^{5/2}} du$. Or $\frac{\ln(1+u)^\alpha}{u^{5/2}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^{5/2-\alpha}}$ donc $\int_1^2 \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 3/2$. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 3/2$.

c) $\frac{1}{e^{\sqrt{t}-1}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1 \frac{dt}{e^{\sqrt{t}-1}}$ converge. $\frac{1}{e^{\sqrt{t}-1}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^{\sqrt{t}-1}}$ converge. D'où $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^{\sqrt{t}-1}}$ converge.

Exercice 2

a) $\phi(t) \underset{0}{=} -1 + \frac{t}{2} + o(t)$ donc ϕ est prolongeable par continuité en posant $\phi(0) = -1$, et ce prolongement est dérivable (car ϕ possède un développement limité d'ordre 1 en ce point).

b) $\ln x = -\int_x^1 \frac{dt}{t}$ donc $f(x) + \ln x = \int_x^1 \phi(t) dt$. D'après le théorème fondamental de l'analyse la fonction $\Phi : x \mapsto \int_x^1 \phi(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et possède une dérivée d'ordre 2 en 0 donc d'après la formule de Taylor-Young,

$$\Phi(x) \underset{0}{=} \Phi(0) + x\Phi'(0) + \frac{x^2}{2}\Phi''(0) + o(x^2)$$

avec $\Phi(0) = \int_0^1 \phi(t) dt = K$, $\Phi'(0) = -\phi(0) = 1$ et $\Phi''(0) = -\phi'(0) = -\frac{1}{2}$, ce qui donne : $f(x) + \ln x \underset{0}{=} K + x - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

Exercice 3

a) Pour tout $t \geq x$, $\frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-t}}{xt}$ donc en intégrant, $0 \leq g(x) \leq \frac{f(x)}{x}$, ce qui prouve que $g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$.

b) Une intégration par parties conduit à $f(x) = \left[\frac{-e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - g(x) = \frac{e^{-x}}{x} - g(x)$ ce qui donne à l'aide de la question précédente : $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + o(f(x))$, soit $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

c) D'après la question précédente, $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ donc pour tout $x > 0$, f est intégrable sur $[x, +\infty[$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, et $f'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$. Par ailleurs, d'après la question précédente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$ donc on peut réaliser une intégration par parties :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \left[tf(t) \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = -xf(x) + e^{-x}$$

Il reste à faire tendre x vers 0 : on a $f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{dt}{t} + K = -\ln x + K$ où $K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est une constante donc $0 \leq xf(x) \leq Kx - x \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$.

f étant positive, on a montré que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Exercice 4

a) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang A à partir duquel $f'(x) \leq \epsilon f(x)$, ce qu'on peut encore écrire : $(f'(x) - \epsilon f(x))e^{-\epsilon x} \leq 0$. Ceci montre que la fonction $x \mapsto f(x)e^{-\epsilon x}$ est décroissante sur $[A, +\infty[$ et donc que pour tout $x \geq A$, $0 \leq f(x)e^{-\epsilon x} \leq f(A)e^{-\epsilon A}$, ce qui implique que $f(x) = O(e^{\epsilon x})$.

b) En choisissant $\epsilon < 1$ ceci montre que $f(t)e^{-t} = O(e^{-(1-\epsilon)x})$ et donc que $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, ce qui donne un sens à $F(x)$.

La relation $f(t)e^{-t} = O(e^{-(1-\epsilon)x})$ prouve aussi que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-t} = 0$, ce qui nous permet de réaliser l'intégration par parties suivante : $F(x) = \left[-f(t)e^{-t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} f'(t)e^{-t} dt = f(x)e^{-x} + \int_x^{+\infty} f'(t)e^{-t} dt$.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang A à partir duquel $|f'(t)| \leq \epsilon f(t)$ donc $\forall x \geq A$, $\left|\int_x^{+\infty} f'(t)e^{-t} dt\right| \leq \epsilon \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t} dt = \epsilon F(x)$.

Ceci traduit le fait que $\int_x^{+\infty} f'(t)e^{-t} dt = o_{+\infty}(F(x))$, et donc que $F(x) = f(x)e^{-x} + o_{+\infty}(F(x))$, soit encore $F(x) \sim_{+\infty} f(x)e^{-x}$.

Exercice 5

a) f' est de signe constant (négatif) car f est décroissante, donc prouver que f' est intégrable revient à montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge. Or $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt = -f(0) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt$.

b) Une intégration par parties donne $\int_0^K f(t)e^{itx} dt = \left[\frac{f(t)}{ix} e^{itx}\right]_0^K + \frac{i}{x} \int_0^K f'(t)e^{itx} dt$.

$|f(K)e^{iKx}| = |f(K)|$ donc $\lim_{K \rightarrow +\infty} f(K)e^{iKx} = 0$ et $|f'(t)e^{itx}| = |f'(t)|$ et puisque f' est intégrable, il en est de même de $t \mapsto f'(t)e^{itx}$. On peut donc faire tendre K vers $+\infty$ dans la relation précédente, ce qui montre que $g(x)$ a bien un sens et que $g(x) = \frac{i}{x} \left(f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)e^{itx} dt\right)$.

c) L'expression précédente montre que pour prouver que g est continue, il suffit de montrer que $h : x \mapsto \int_0^{+\infty} f'(t)e^{itx} dt$ l'est. On applique pour cela le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- pour tout $x > 0$, $t \mapsto f'(t)e^{itx}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f'(x)e^{itx}$ est continue;
- pour tout $x > 0$, $\forall t \geq 0$, $|f'(t)e^{itx}| \leq |f'(t)| = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable donc h est bien continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6

a) On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est $\mathcal{C}_{\text{pm}}^0$ sur \mathbb{R} ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} ;
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_{\infty}|f(t)| = \phi(t)$.

La fonction ϕ est $\mathcal{C}_{\text{pm}}^0$ et intégrable sur \mathbb{R} donc $f * g$ est continue sur \mathbb{R} .

b) On a ici $(f * g)(x) = \int_a^b f(t)g(x-t) dt$. Appliquons de nouveau le théorème de continuité des intégrales à paramètre, mais cette fois-ci sur un segment $[u, v] \subset \mathbb{R}$:

- pour tout $x \in [u, v]$ la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est $\mathcal{C}_{\text{pm}}^0$ sur $[a, b]$;
- pour tout $t \in [a, b]$ la fonction $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est \mathcal{C}^0 sur $[u, v]$;
- $\forall x \in [u, v]$, $\forall t \in [a, b]$, $|f(t)g(x-t)| \leq \|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty, [u, v]} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est $\mathcal{C}_{\text{pm}}^0$ et intégrable sur $[a, b]$ donc $f * g$ est continue sur tout segment $[u, v]$, puis par recouvrement sur \mathbb{R} .